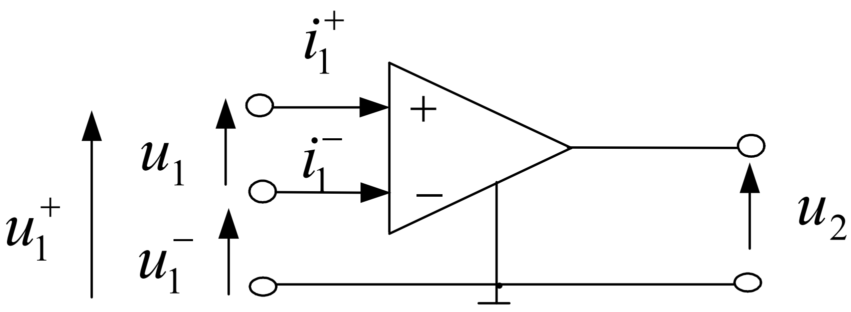
Wzmacniacz operacyjny (WO) i obwody z WO

Literatura: podręcznik J. Osiowskiego i J. Szabatina: Podstawy teorii obwodów,

tom I, WNT Warszawa 1993, str. 131 Przykład 1.7-5, str. 314-323, p. A, B, C i D i str. 338-340 – zadania 3.38, 3.39 i 3.41,

tom II, WNT Warszawa 1993, str. 109-110 Przykład 4.4-18,

tom III, WNT Warszawa 1995, str. 418 Przykład 10.3-2.



Symbol WO (różnicowy wzmacniacz operacyjny)

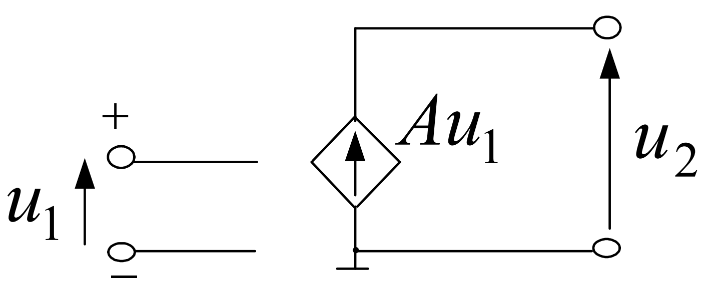
$$u_1 \stackrel{\Delta}{=} u_1^+ - u_1^- = u_d$$

napięcie różnicowe

(d od ang. *difference*)

Warunki wirtualnego zwarcia: $u_d = 0, \quad i_1^+ = i_1^- = 0$.

Schemat zastępczy WO

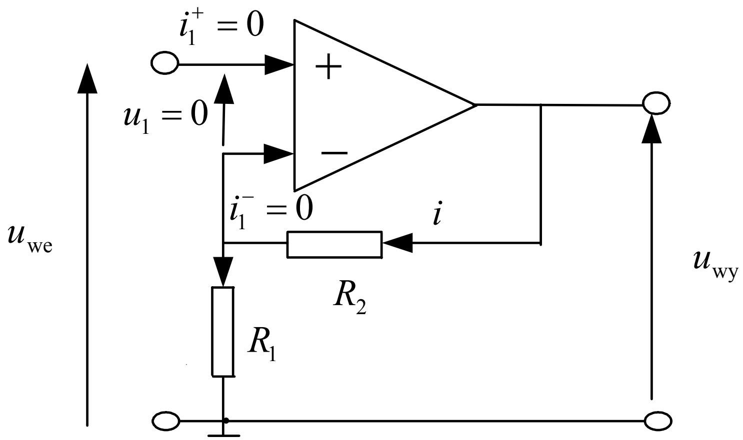


$$A \to \infty$$

$$u_2 = Au_1$$

Wzmacniacz nieodwracający

Nie zmienia znaku (fazy) sygnału



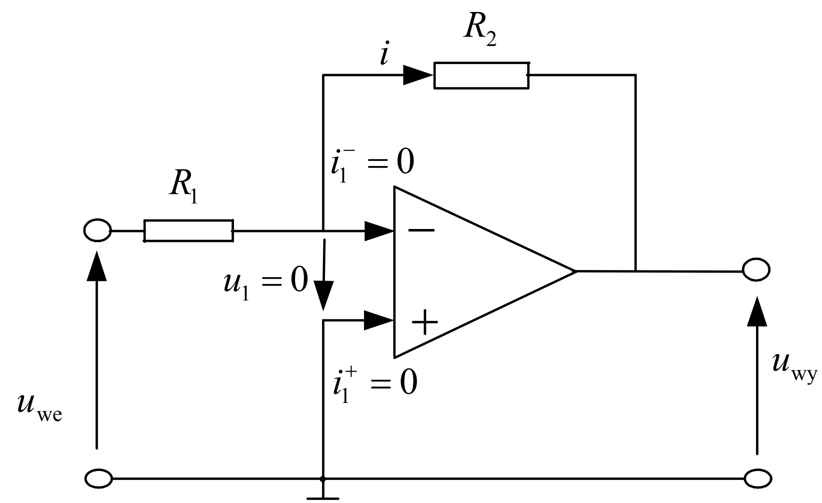
$$i = \frac{u_{we}}{R_1}$$

$$u_{wy} = (R_1 + R_2)i = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)u_{we}$$

$$k \stackrel{\Delta}{=} \frac{u_{wy}}{u_{we}} = 1 + \frac{R_2}{R_1} > 1$$

Wzmacniacz **odwracający**

Zmienia znak (fazę) sygnału



$$i = \frac{u_{we}}{R_1} \qquad i = -\frac{u_{wy}}{R_2}$$

$$k \stackrel{\Delta}{=} \frac{u_{wy}}{u_{we}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

gdy $R_1 = R_2$ to $k = 1$ - inwerter

Jeżeli R_1 zastąpimy przez $Z_1(s)$ i R_2 zastąpimy przez $Z_2(s)$ to

$$H_u(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{u_{\mathrm{wy}}(s)}{u_{\mathrm{we}}(s)} = 1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

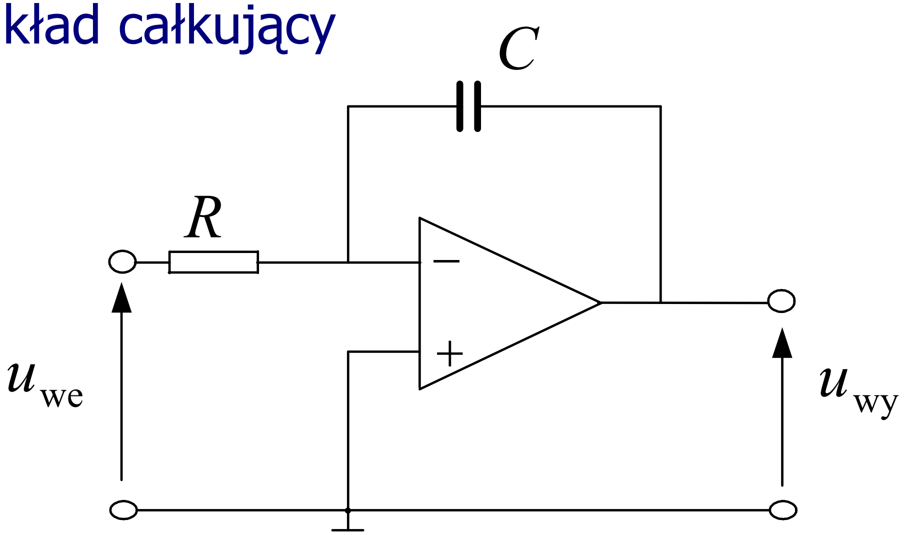
dla wzmacniacza nieodwracającego,

a

$$H_u(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{u_{\mathrm{wy}}(s)}{u_{\mathrm{we}}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

dla wzmacniacza odwracającego.

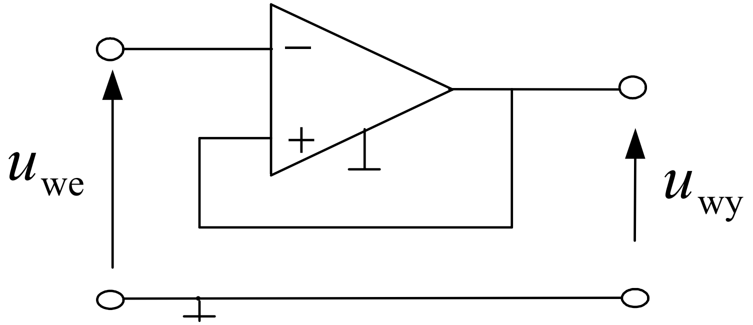
Układ całkujący



$$Z_1(s) = R \qquad Z_2(s) = \frac{1}{sC}$$

$$H_u(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{u_{wy}(s)}{u_{we}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{1}{sRC}$$

Wtórnik



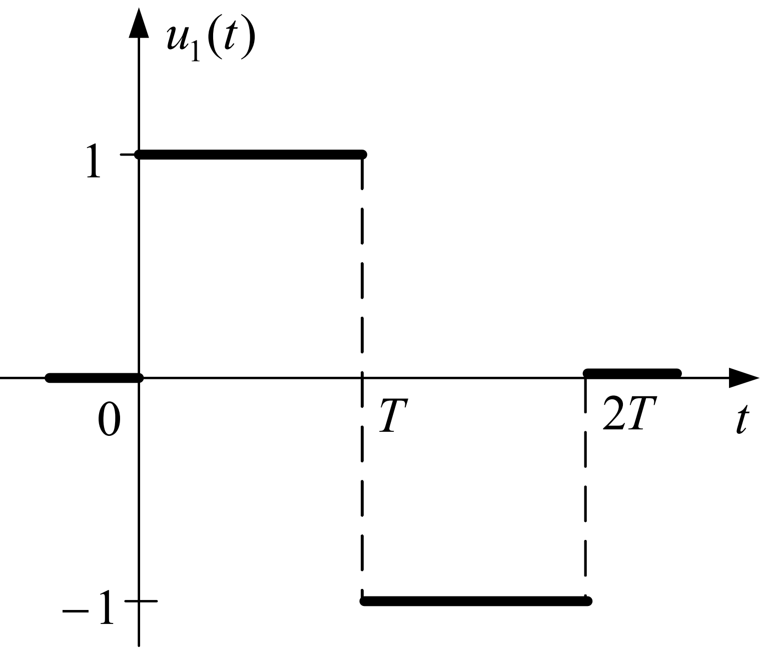
$$u_{wy} = u_{we}$$

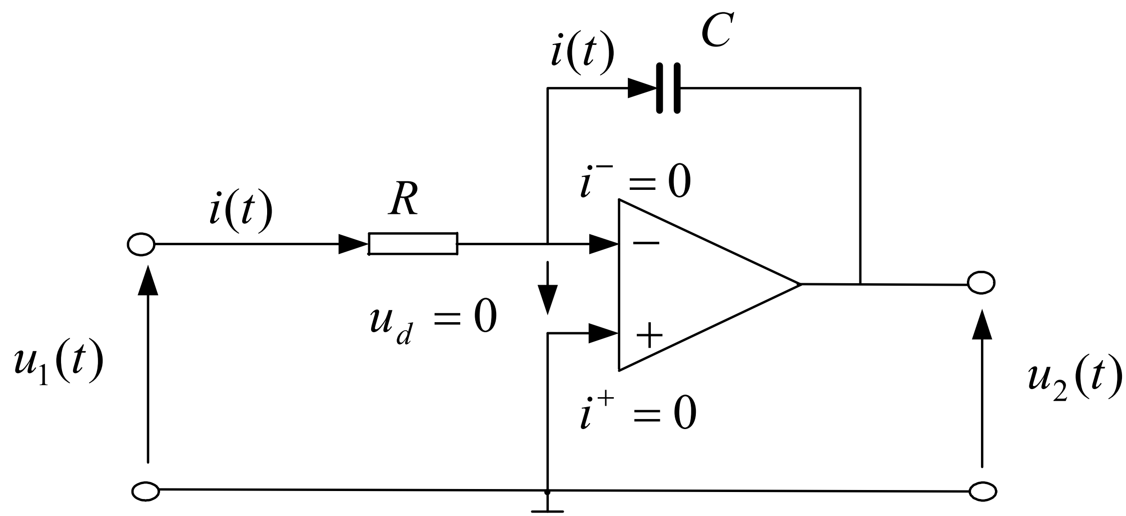
Wtórnik powtarza napięcie wejściowe na zaciskach wyjściowych bez względu na obciążenie dołączone do tych zacisków. Pełni rolę bufora (separatora) oddzielającego układy dołączone do jego zacisków wejściowych i wyjściowych. Nie pobiera prądu z układu dołączonego do jego zacisków wejściowych, a więc nie obciąża tego układu.

Przykład z układem całkującym na WO

Znajdź odpowiedź $u_2(t)$ danego obwodu na pobudzenie sygnałem $u_1(t)$ korzystając:

A. z metody rachunku operatorowego Laplace'a,
B. ze splotu pobudzenia z odpowiedzią impulsową.





Z warunków wirtualnego zwarcia $u_d = i^+ = i^- = 0$ wynika, że

$$U_1(s) = RI(s) \qquad U_2(s) + \frac{1}{sC} I(s) = 0$$

Stąd

$$H(s) \stackrel{\Delta}{=} \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{\text{zwp}} = -\frac{1}{sRC}$$

Ad. A. Ponieważ $u_1(t) = 1(t) - 2 \cdot 1(t-T) + 1(t-2T)$

To

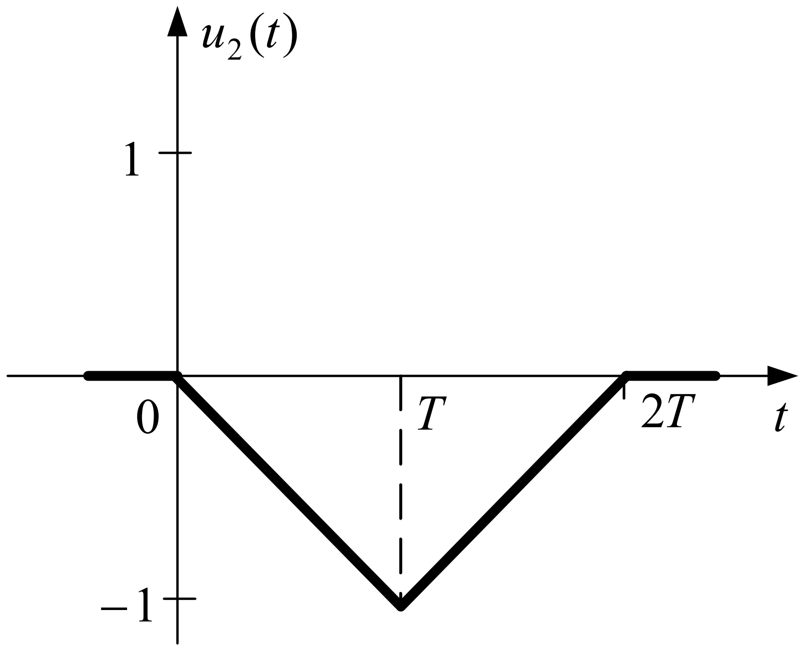
$$U_1(s) = \frac{1 - 2e^{-sT} + e^{-2sT}}{s}$$

oraz

$$U_2(s) = H(s)U_1(s) = -\frac{1 - 2e^{-sT} + e^{-2sT}}{s^2 RC}$$

A stąd

$$u_2(t) = -\frac{1}{RC}\left[t \cdot 1(t) - 2 \cdot (t-T) \cdot 1(t-T) + (t-2T) \cdot 1(t-2T)\right]$$



Jeżeli chcemy zmienić znak sygnału na przeciwny, to należy zastosować inwerter w kaskadzie z układem całkującym.

Ad. B. Odpowiedź impulsowa

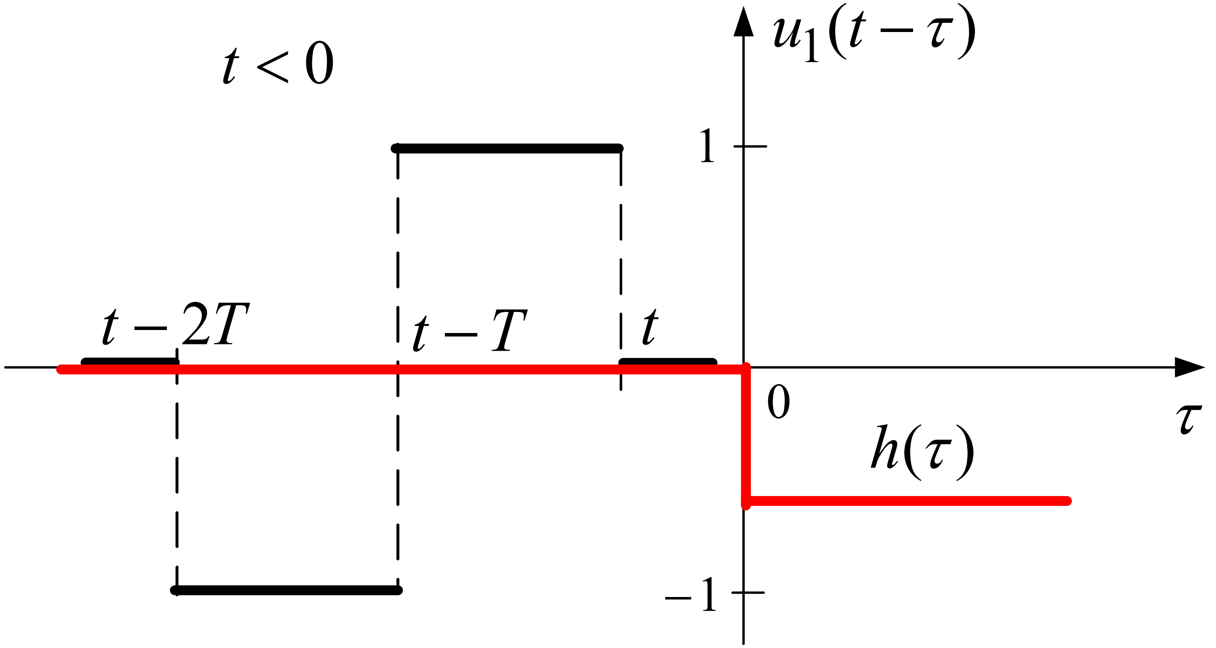
$$h(t) = L^{-1}H(s) = -\frac{1}{RC}1(t)$$

Splot

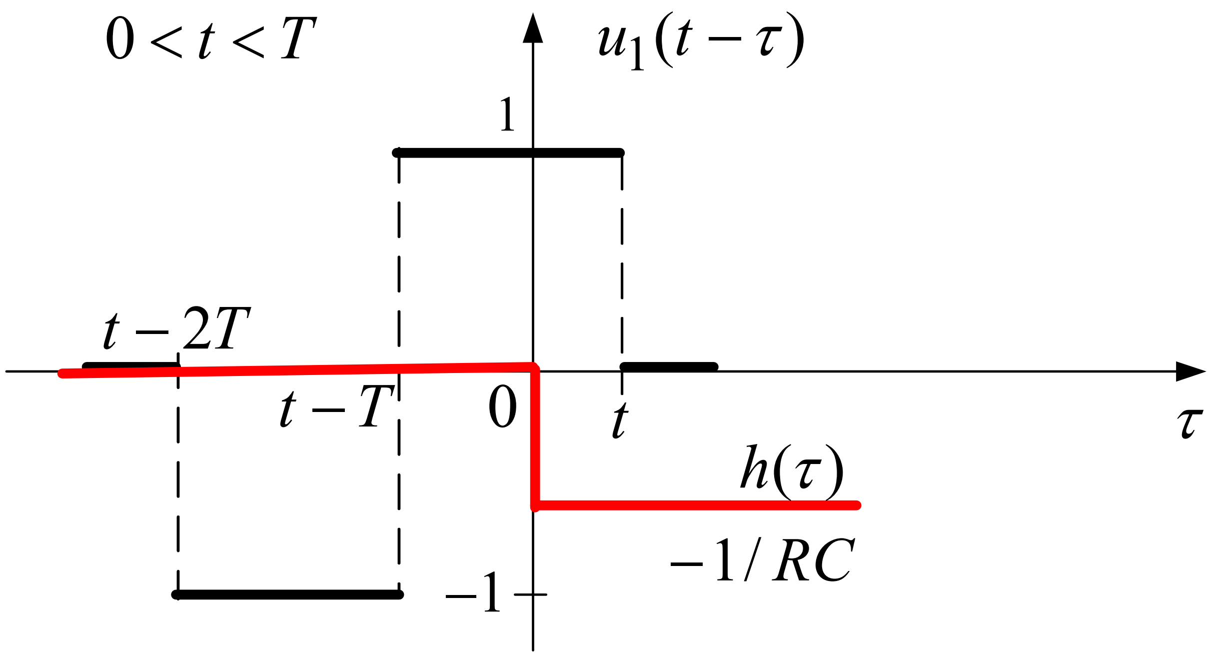
$$u_2(t) = u_1(t) * h(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)u_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Przedziałami

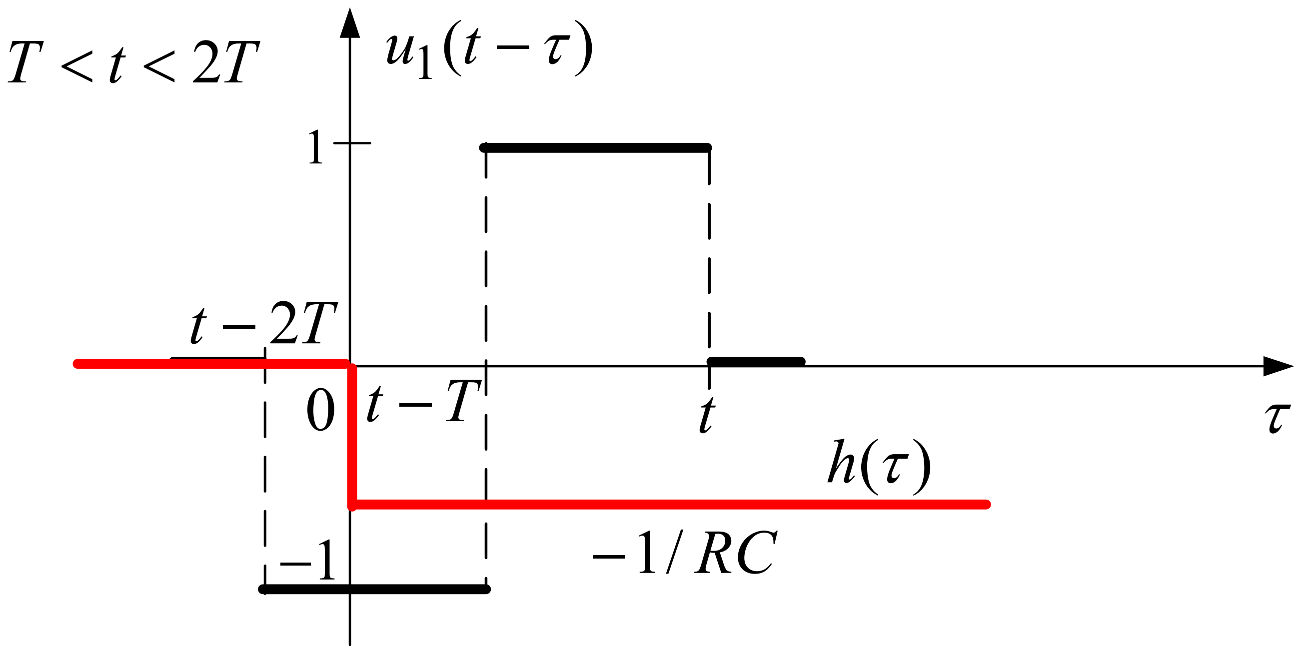
dla $t < 0$ $\quad u_2(t) = 0$



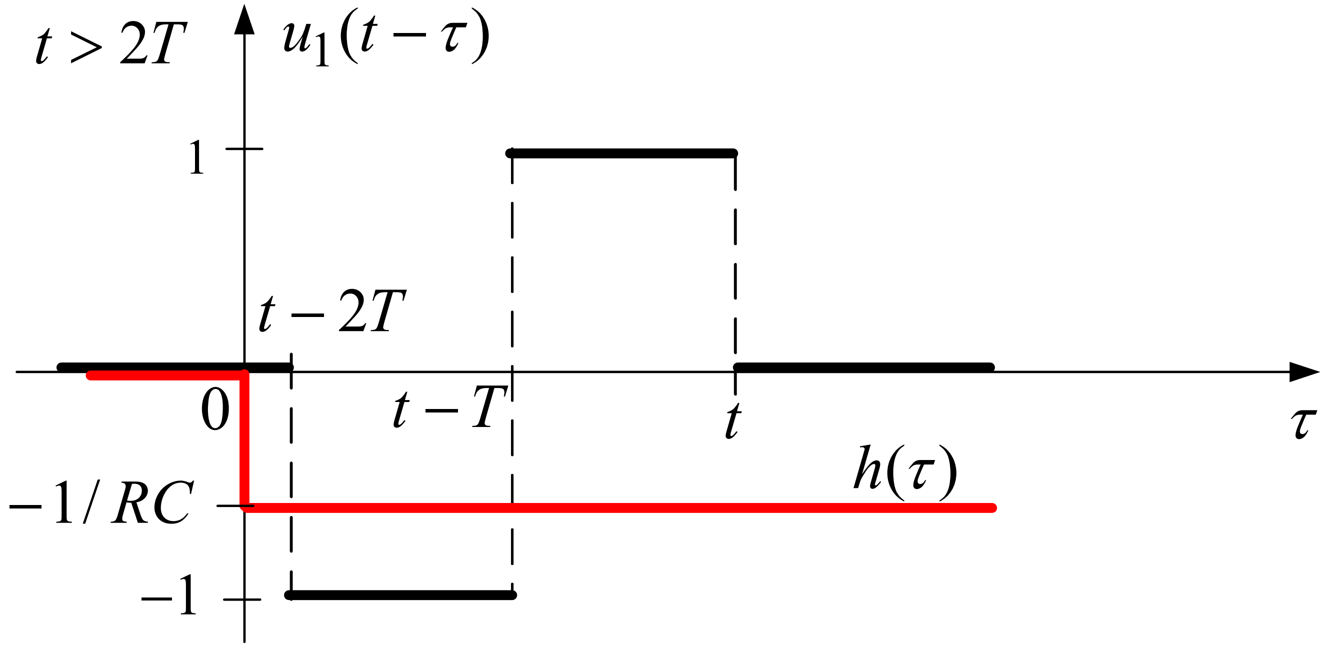
dla $0 < t < T \quad u_2(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t \mathrm{d}\tau = \frac{-t}{RC}$



$$\text{dla } T < t < 2T \quad u_2(t) = -\frac{1}{RC}\left(\int_{t-T}^{t} \mathrm{d}\tau - \int_{0}^{t-T} \mathrm{d}\tau\right) = \frac{t-2T}{RC}$$



$$\text{dla } t > 2T \quad u_2(t) = -\frac{1}{RC}\left(\int_{t-T}^{t} \mathrm{d}\tau - \int_{t-2T}^{t-T} \mathrm{d}\tau \right) = 0$$



Zadanie domowe. Znajdź odpowiedź $u_2(t)$ obwodu z poprzedniego przykładu na pobudzenie pojedynczym impulsem prostokątnym

$$u_1(t) = 1(t) - 1(t-T)$$

korzystając:

A. z metody rachunku operatorowego Laplace'a,
B. ze splotu pobudzenia z odpowiedzią impulsową.

Wynik obliczeń naszkicuj i porównaj z wynikiem całkowania:

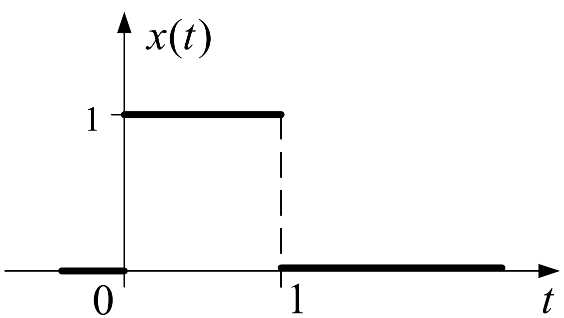
$$u_{2\mathrm{c}}(t) = \int_0^t u_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

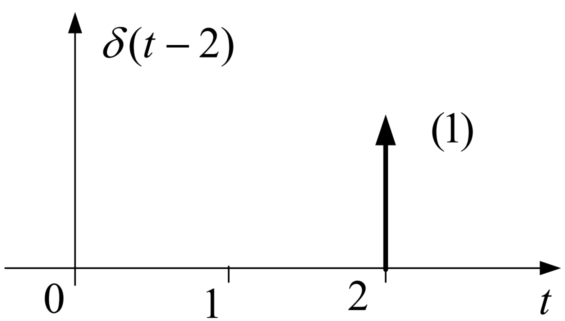
Jakie są podobieństwa, a jakie różnice? Co należy zrobić, aby w obu przypadkach uzyskać ten sam wynik?

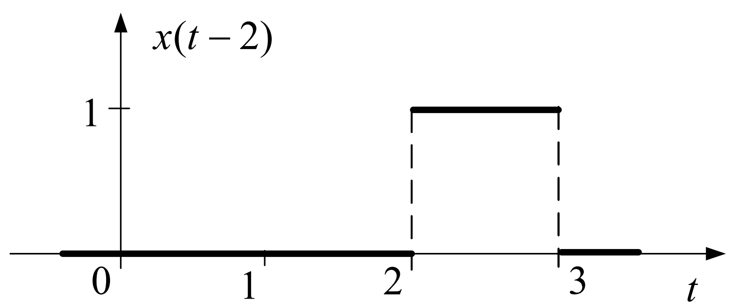
Splot z deltą Diraca

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \qquad x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

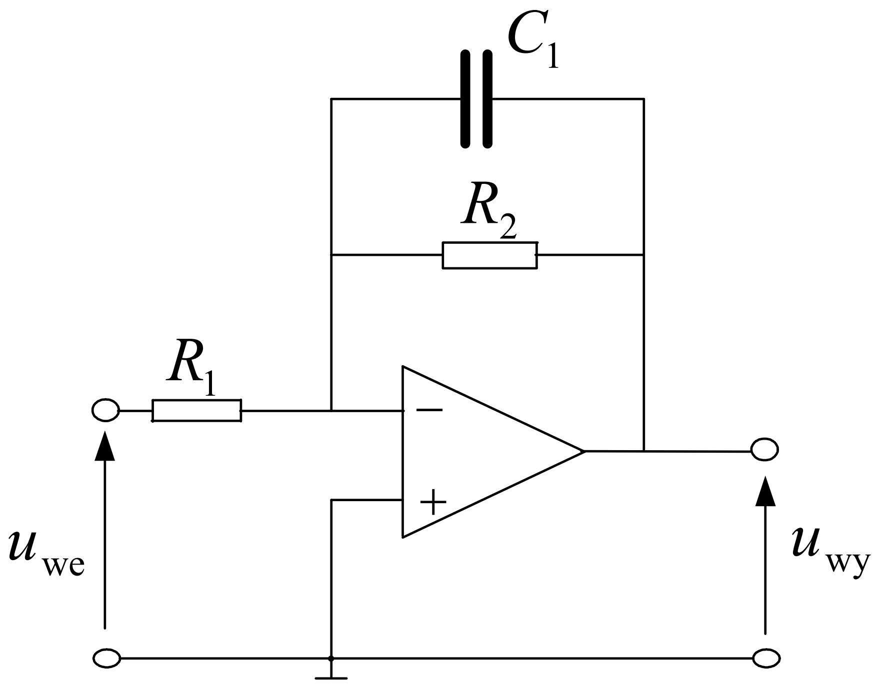
Znajdź wynik splotu $x(t)$ i $\delta(t-2)$.





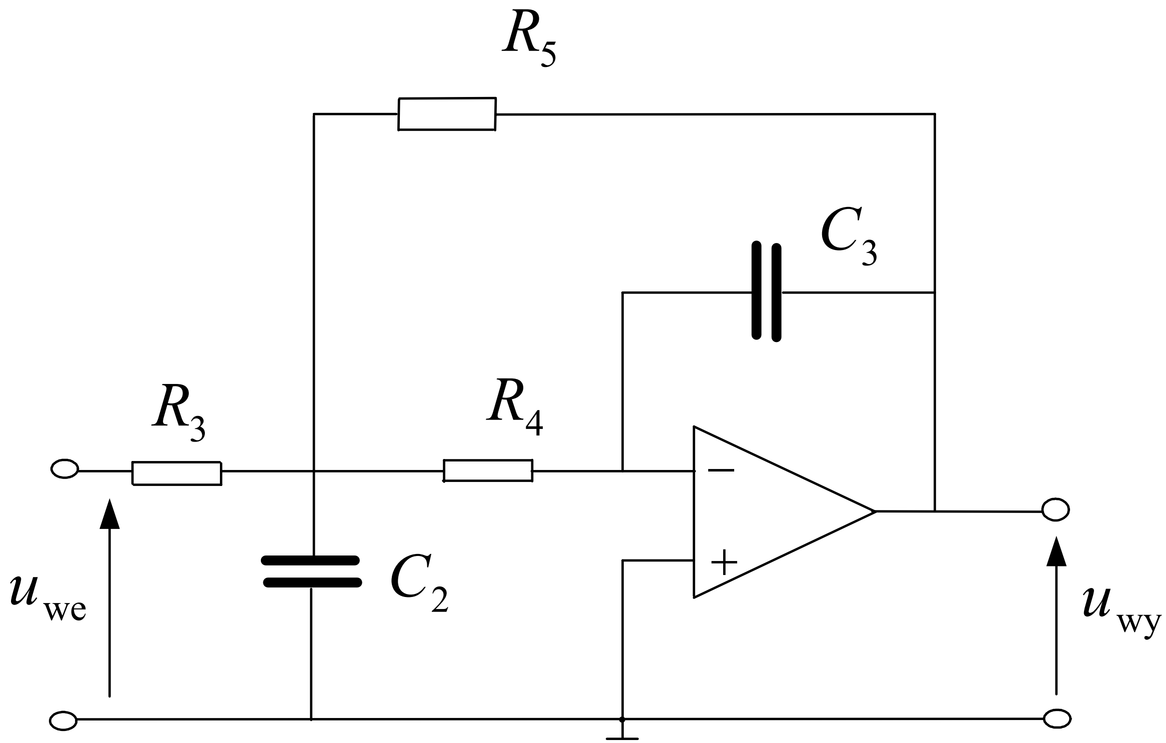


Filtry aktywne RC – typowe rozwiązania



$$H_1(s) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{sR_2C_1 + 1} \qquad n = 1$$

Filtr pierwszego rzędu – realizuje 1 biegun rzeczywisty.

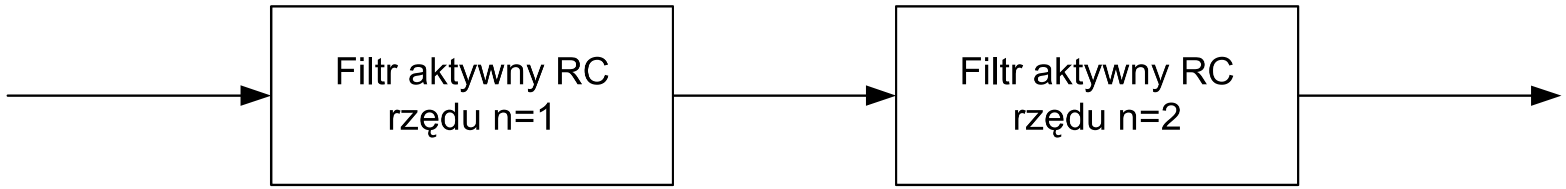


$$H_2(s) = \frac{-\dfrac{R_5}{R_3}}{s^2 R_4 R_5 C_2 C_3 + s\left(R_4 + R_5 + \dfrac{R_4 R_5}{R_3}\right) C_3 + 1} \qquad n = 2$$

Filtr drugiego rzędu – realizuje 2 bieguny rzeczywiste lub parę biegunów zespolonych sprzężonych.

Filtr aktywny trzeciego rzędu $n=3$ otrzymujemy przez połączenie kaskadowe filtrów aktywnych rzędu $n=1$ i $n=2$. Wówczas transmitancja

$$H_3(s) = H_1(s)H_2(s) \qquad n=3$$



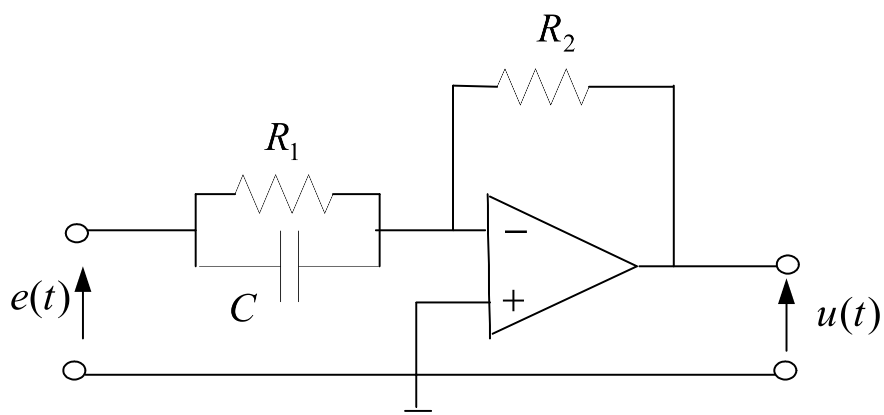
Podobnie otrzymujemy filtr aktywny rzędu wyższego niż 3.

Jako zadanie domowe wyprowadź wzory na transmitancje: $H_1(s)$, $H_2(s)$ oraz $H_3(s)$. Jaki znak ma ta ostatnia w porównaniu z poprzednimi?

Zadanie domowe. W obwodzie przedstawionym na rys. 1 znajdź transmitancję $H(s) = u(s)/e(s)$, naszkicuj charakterystykę amplitudową i oblicz za pomocą przekształcenia Laplace'a, i narysuj przebiegi napięcia: na wejściu $e(t)$ i na wyjściu $u(t)$ obwodu.

Dane: $E = 1\,\mathrm{V}$ $R_2 = 2\,\mathrm{M\Omega}$ $R_1 = 100 R_2$ $C = 1\,\mathrm{nF}$ $T = 2\,\mathrm{ms}$

$$e(t) = E\begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > 2T \\ t/T, & 0 \le t \le T \\ 2 - t/T, & T \le t \le 2T \end{cases}$$



Rys.1

Wskazówka. $t1(t) \Leftrightarrow 1/s^2$

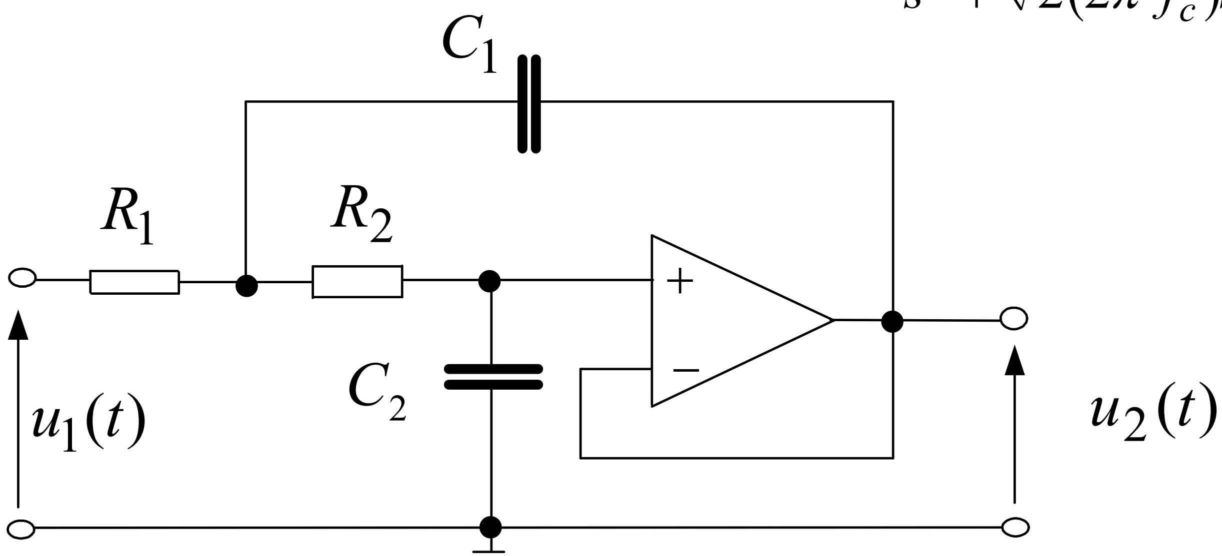
$$(t-T)1(t-T) \Leftrightarrow e^{-sT}/s^2$$

To zadanie proszę własnoręcznie i samodzielnie wykonać na papierze i oddać na wykładzie, następnym po przerobieniu tematu: Wzmacniacz operacyjny.

Filtr aktywny Sallena-Keya

Filtr dolnoprzepustowy drugiego rzędu o transmitancji Butterwortha z częstotliwością graniczną f_c:

$$H(s) = \frac{(2\pi f_c)^2}{s^2 + \sqrt{2}(2\pi f_c)s + (2\pi f_c)^2}$$



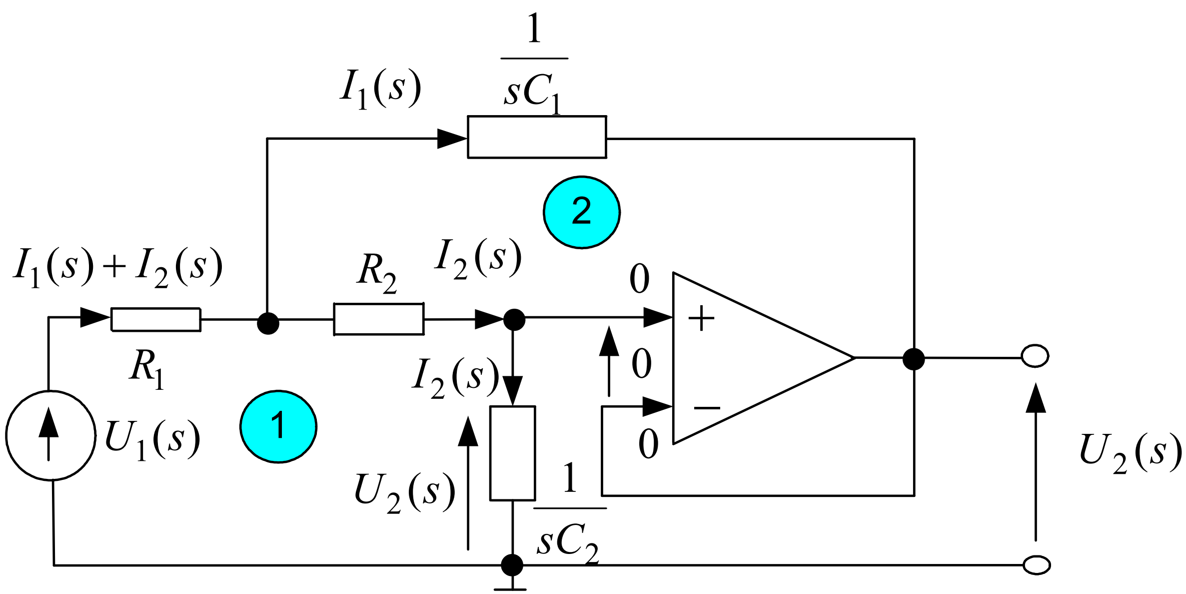
Zastosowania: w ADC (ang. *analog-to-digital converter*) jako filtr antyaliasingowy/rekonstrukcyjny.

a) Znaleźć transmitancję $H(s) = \left.\frac{U_2(s)}{U_1(s)}\right|_{\text{zwp}}$

b) Narysować charakterystykę amplitudową $A(f) = |H(j\omega)|_{\omega=2\pi f} = |H(s)|_{s=j\omega}$

zakładając $C_1 = 0.01\,\mu\text{F}$ i $f_c = 3.4\,\text{kHz}$ – częstotliwość graniczną filtru na pasmo telefoniczne (indeks dolny c od ang. *cutoff*).

Ad. a). Schemat zastępczy operatorowy przy zwp



Równania operatorowe NPK dla oczek 1 i 2, i równanie operatorowe z prawa Ohma dla dolnego kondensatora

$$U_1(s) = R_1\left[I_1(s)+I_2(s)\right] + \left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right)I_2(s) \qquad \frac{1}{sC_2}I_1(s) = R_2 I_2(s) \qquad U_2(s) = \frac{1}{sC_2}I_2(s)$$

Stąd

$$H(s) = \left.\frac{U_2(s)}{U_1(s)}\right|_{\text{zwp}} = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + sC_2(R_1+R_2)+1}$$

Równoważnie

$$H(s)=\frac{\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2+s\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)+\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

Ad. b). Przyrównując odpowiednie współczynniki w powyższym wzorze i w transmitancji Butterwortha

$$H(s)=\frac{(2\pi f_c)^2}{s^2+\sqrt{2}(2\pi f_c)s+(2\pi f_c)^2}$$

oraz przyjmując $R=R_1=R_2$ otrzymujemy $R=\dfrac{1}{\pi\sqrt{2}f_cC_1}$ $\quad C_2=\dfrac{1}{R^2C_1(2\pi f_c)^2}$

Stąd $\quad R\cong 6620\,\Omega=6.62\ \mathrm{k\Omega} \qquad C_2=5\cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}=5\ \mathrm{nF}$

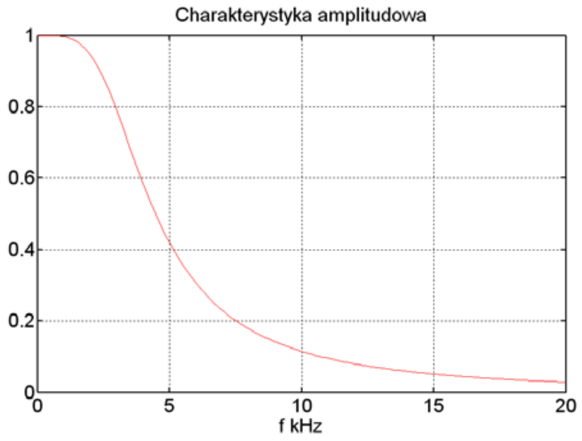
Możemy też pokazać, że tu, tj. dla analogowego filtru dolnoprzepustowego Butterwortha drugiego rzędu, transmitancja częstotliwościowa

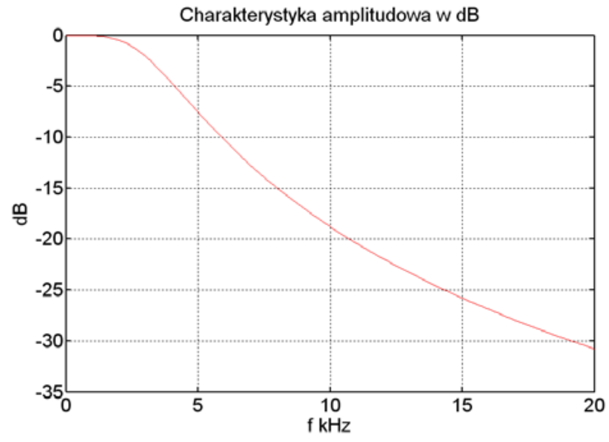
$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{(2\pi f_c)^2}{-\omega^2 + j\omega\sqrt{2}(2\pi f_c) + (2\pi f_c)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{2\pi f_c}\right)^2 + j\sqrt{2}\left(\frac{\omega}{2\pi f_c}\right)}$$

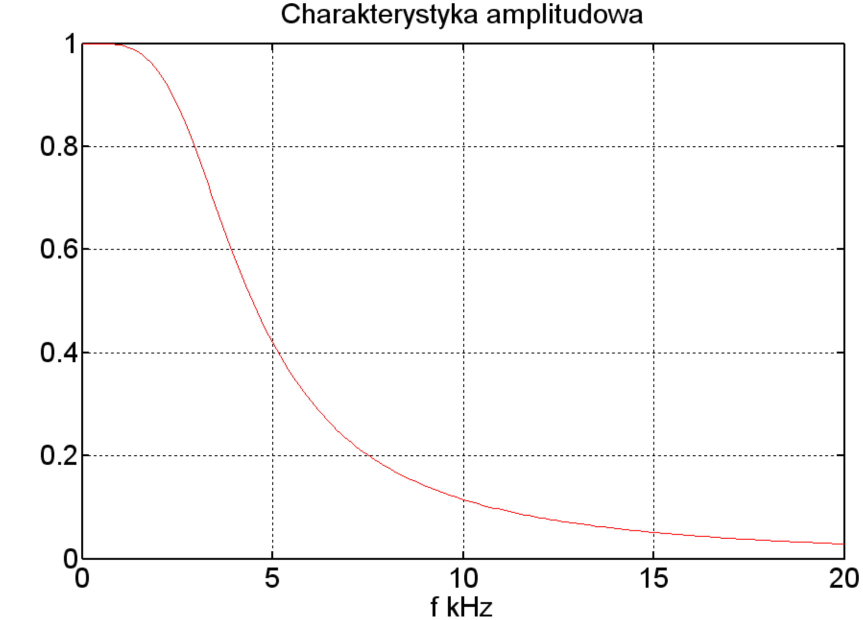
ma charakterystykę amplitudową

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^4}}$$

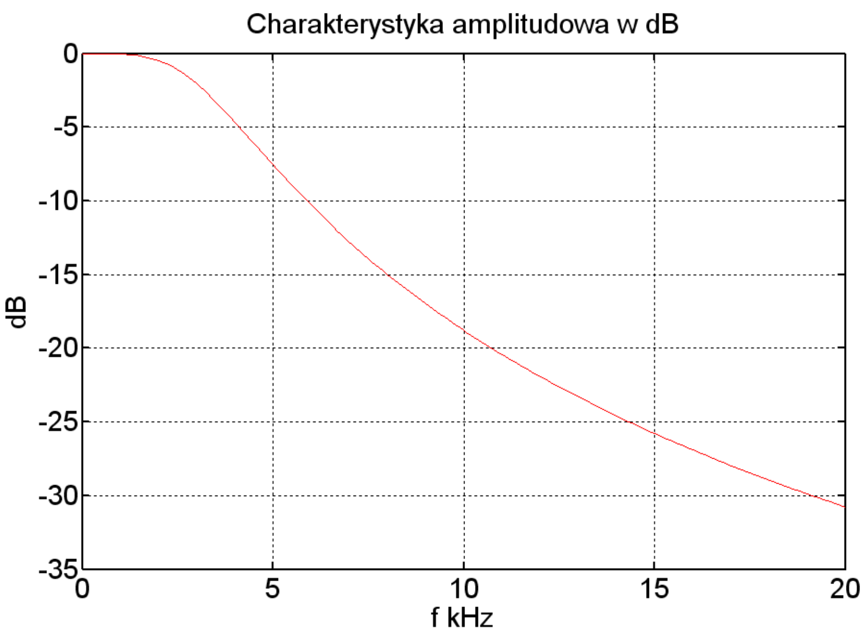
gdzie $\omega = 2\pi f$.







Zakres tłumienia liczymy od poziomu $\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$ dla $f_c = 3.4\,\mathrm{kHz}$.



Charakterystyka w decybelach

$$20\log_{10} A(\omega)$$

Tu dla $\omega = f = 0$ mamy

$$20\log_{10} A(\omega)\big|_{\omega=2\pi f=0} = 10\log_{10} 1 = 0$$

A dla $f_c = 3.4\,\mathrm{kHz}$ otrzymujemy

$$20\log_{10} A(\omega)\big|_{\omega=2\pi\, f_c} = 10\log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} \cong -3\,\mathrm{dB}$$