DFT – dyskretne przekształcenie Fouriera

ang. *discrete Fourier transformation*

DFT, w przeciwieństwie do DTFT, dotyczy wyłącznie ciągów o skończonej długości, tzn.o skończonej liczbie próbek N.

Przekształcenie proste

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0,1,\cdots,N-1 \quad \text{DFT wzór analizy}$$

Przekształcenie odwrotne – IDFT (ang. *inverse* DFT)

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}k\,n}, n = 0,1,\cdots,N-1 \quad \text{IDFT wzór syntezy}$$

Związek DFT z DTFT

$$X[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, k = 0,1,\cdots,N-1$$

co oznacza równomierne próbkowanie DTFT na okręgu jednostkowym.

Właściwości DFT

Są podobne do właściwości przekształceń: Z i DTFT, ale istnieją różnice wynikające ze skończonej długości ciągów $x[n]$ i $X[k]$ (z definicji). Główna różnica: przesunięcie i splot są kołowe.

- Notacja: $x[n] \Leftrightarrow X[k], \quad y[n] \Leftrightarrow Y[k], \quad n,k = 0,1,\cdots,N-1$

  oznacza parę transformat – przekształcenie proste DFT i odwrotne – IDFT

- $x[[n]]_N$ oznacza N-punktowe okresowe przedłużenie ciągu $x[n]$ określonego dla n=0, 1, ..., N-1, innymi słowy

$$x[[n]]_N = x[n] \text{ w przedziale } 0 \le n \le N-1, \text{ gdzie } [[n]]_N \stackrel{\Delta}{=} n \text{ modulo } N,$$

a dla n spoza tego przedziału

$$x[[n]]_N = x[n+mN]$$

gdzie m jest liczbą całkowitą, dodatnią lub ujemną taką, że $n+kN$ leży wewnątrz przedziału $0 \le n \le N-1$. N jest okresem ciągów $x[n]$ i $X[k]$.

DFT jest przekształceniem ciągu N-punktowego $x[n]$ w ciąg N-punktowy $X[\mathrm{k}]$. Istotne są tylko punkty dla n=0, 1, ..., N-1 i k=0, 1, ..., N-1. Taki ciąg można zawsze pomnożyć przez okno prostokątne

$$r_N[n] \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} 1, & n = 0,1,\cdots,N-1 \\ 0, & n < 0, n > N-1 \end{cases}$$

bez zmiany wartości wyrazów ciągu N-punktowego.

Przykłady.

$3 \text{modulo} 5 = 3$

$7 \text{modulo} 5 = (5+2) \text{modulo} 5 = 2$

$-1 \text{modulo} 3 = (-3+2) \text{modulo} 3 = 2$

$-7 \text{modulo} 4 = (-8+1) \text{modulo} 4 = 1$

Generalnie, dla liczby $n = n_1 + n_2 N$, gdzie n_1 , n_2 i N są całkowite, reszta z dzielenia *n* przez N wynosi n_1 , co zapisujemy $n_1 = n \, \text{modulo} N$.

c.d. Właściwości DFT

\# Często używa się okna prostokątnego do zapisania zakresu indeksów sygnału (ciągu) $x[n]$.

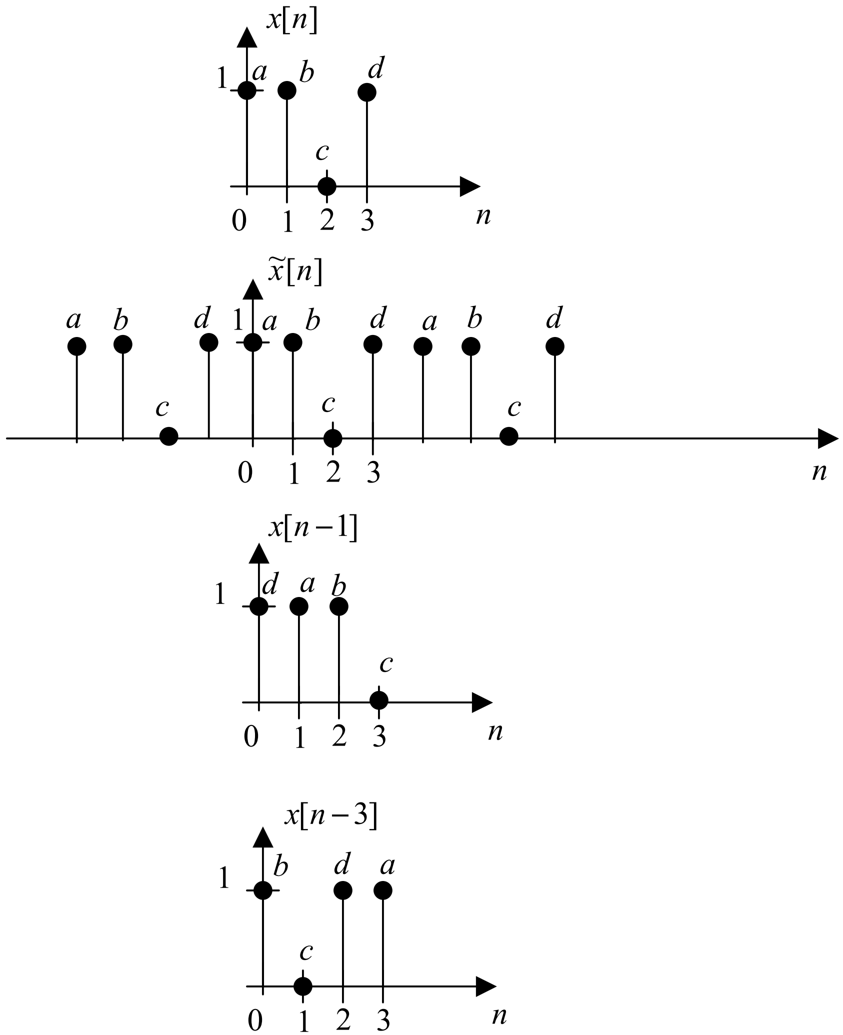
\# O N-punktowych sygnałach i ich N-punktowych DFT zakłada się tu, że są to ciągi zaczynające się od n, k=0 i kończące się dla n, k=N-1.

\# DFT jest reprezentacją okresowego przedłużenia $x[n]$ z okresem N. Okresowe przedłużenie sygnału $x[n]$ tworzy się powtarzając $x[n]$ co N próbek w obu kierunkach: dodatnim i ujemnym. Jest to użyteczne do zrozumienia przesunięcia kołowego i splotu kołowego – istotnych w praktyce właściwości DFT.

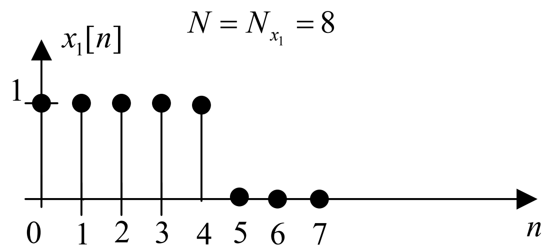
Okresowe przedłużenie sygnału $x[n]$ oznaczymy $\tilde{x}[n]$.

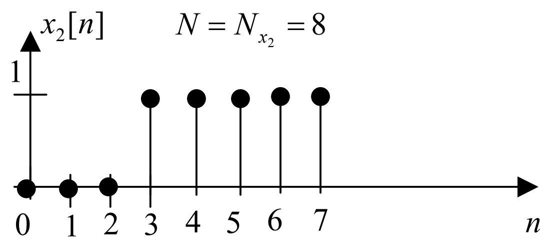
Przykład przesunięcia kołowego ciągu 4 próbek

$\{a, b, c, d\}=\{1, 1, 0, 1\}$

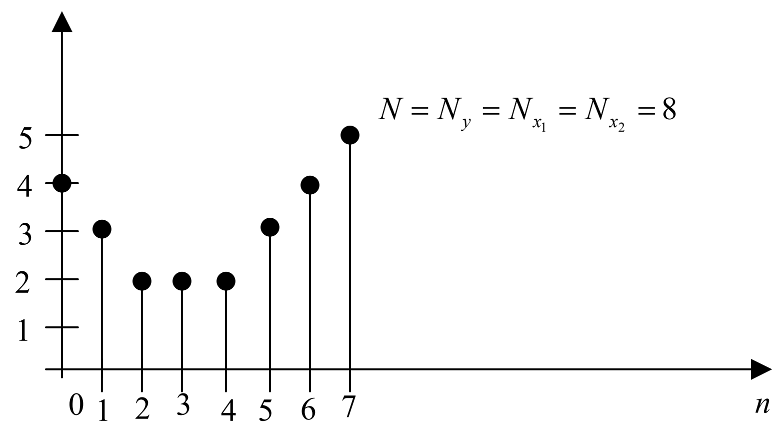


Przykład splotu kołowego dwóch ciągów





$$y_N[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[[n-m]]_N$$

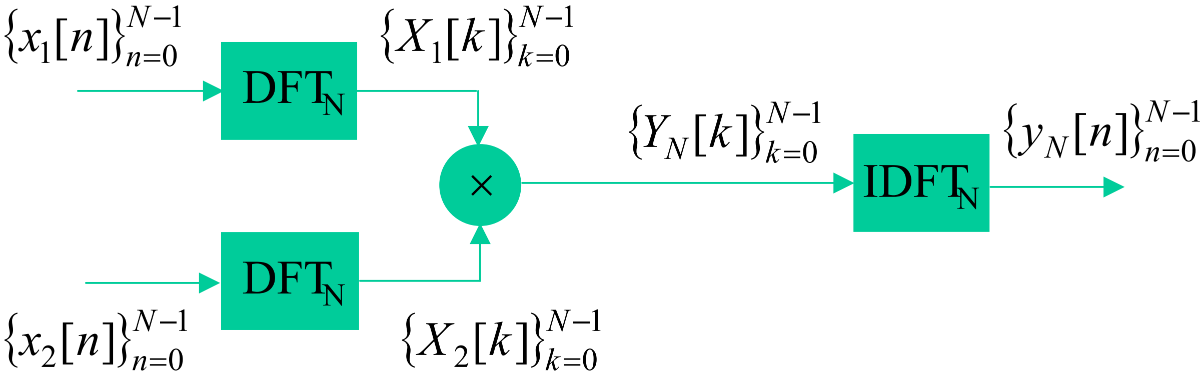


Obliczenia. Mnożymy bez przeniesień. Pierwszą próbkę wyniku końcowego przestawiamy na koniec ciągu $y[n]$, jak pokazują strzałki pod tablicą.

$x_1[n]$					1	1	1	1	1	0	0	0
$x_2[n]$					0	0	0	1	1	1	1	1
		--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
					1	1	1	1	1	0	0	0
				1	1	1	1	1	0	0	0	**1**
			1	**1**	1	1	1	0	0	0	**1**	**1**
		1	**1**	**1**	1	1	0	0	0	**1**	**1**	**1**
	1	**1**	**1**	**1**	1	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
$y_N[n]$					**5**	4	3	2	2	2	3	4

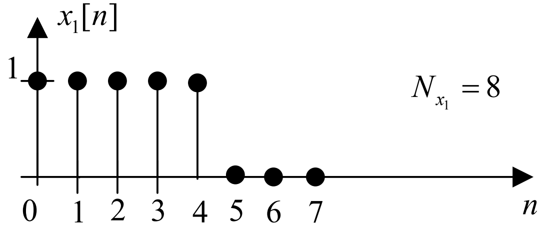
↑ → ↑

$$\{y_N[n]\}_{n=0}^{7} = \{\,4, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 5\}$$

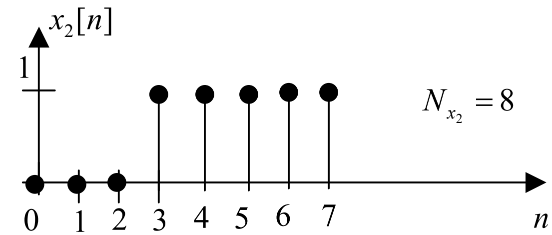


Mnożenie transformat DFT wykonujemy wyraz po wyrazie.

Przykład splotu liniowego dwóch ciągów

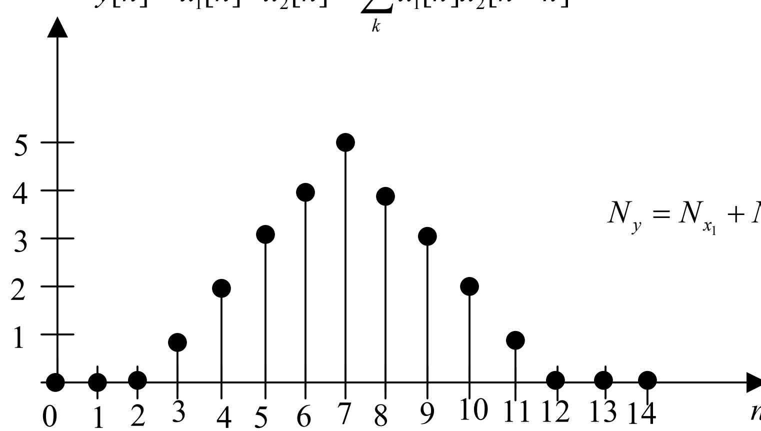


$N_{x_1} = 8$



$N_{x_2} = 8$

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_k x_1[k] x_2[n-k]$$



$N_y = N_{x_1} + N_{x_2} - 1 = 8 + 8 - 1 = 15$

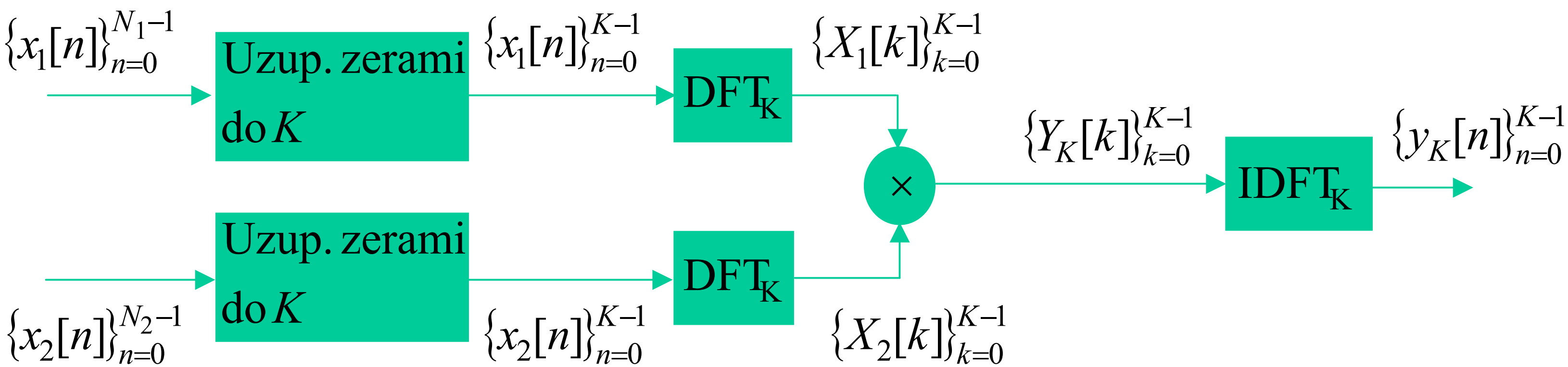
$$\{y[n]\}_{n=0}^{14} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0\}$$

Obliczenia

$x_1[n]$								1.	1	1	1	1	0	0	0
$x_2[n]$					0.	0	0	1	1	1	1	1			
					--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
								1	1	1	1	1			
							1	1	1	1	1				
						1	1	1	1	1					
					1	1	1	1	1						
				1	1	1	1	1							
$y[n]$	0.	0	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0	0	0

$$\{y[n]\}_{n=0}^{14} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0\}$$

Obliczanie splotu liniowego za pomocą splotu kołowego dwóch ciągów.



Wynik tego splotu kołowego jest równoważny wynikowi splotu liniowego, jeżeli $K = N_1 + N_2 - 1$. Można też wziąć $K_1 > N_1 + N_2 - 1$ zamiast K , ale wtedy ciąg wyjściowy będzie dłuższy o $K_1 - K$ próbek o wartościach równych zero. (Rzecz jasna, można je obciąć.)

Ma to znaczenie, gdy realizujemy DFT za pomocą FFT, gdyż FFT operuje długością ciągów $K = 2^r$ (tzw. radix 2 FFT z wykładnikiem r całkowitym) – wtedy splot kołowy najszybciej działa.

Przykład numeryczny. $\{x_1[n]\}_{n=0}^{3} = \{1, 2, 3, 4\}$ $\{x_2[n]\}_{n=0}^{3} = \{0, 1, 2, 3\}$

$N_1 = N_2 = 4 \qquad K = N_1 + N_2 - 1 = 7$

Oba ciągi uzupełnimy zerami do długości K=7. Zatem spleciemy kołowo ciągi: $\{x_1[n]\}_{n=0}^{6} = \{1, 2, 3, 4, 0, 0, 0\}$ i $\{x_2[n]\}_{n=0}^{6} = \{0, 1, 2, 3, 0, 0, 0\}$.

Obliczając DFT (np. z definicji) otrzymujemy

$$\{X_1[k]\}_{k=0}^{6} = \{10, -2.0245 - j6.2240, 0.3460 + j2.4791, 0.1784 - j2.4220,$$
$$0.1784 + j2.4220, 0.3460 - j2.4791, -2.0245 + j6.2240\}$$

$$\{X_2[k]\}_{k=0}^{6} = \{6, -2.5245 - j4.0333, -0.1540 + j2.2383, -0.3216 - j1.7950,$$
$$-0.3216 + j1.7950, -0.1540 - j2.2383, -2.5245 + j4.0333\}$$

$$\{Y[k]\}_{k=0}^{6} = \{60, -19.9928 + j23.8775, -5.6024 + j0.3927, -4.4049 + j0.4585,$$
$$-4.4049 - j0.4585, -5.6024 - j0.3927, -19.9928 - j23.8875\}$$

$$\{\mathrm{y[n]}\}_{n=0}^{6} = \mathrm{IDFT}\{Y[k]\}_{k=0}^{6} = \{0, 1, 4, 10, 16, 17, 12\}$$

Sprawdzam wynik końcowy w MATLABie

```
>> conj(fft([0 1 4 10 16 17 12])')

ans =
```

60.0000	$Y[0]$
-19.9928 +23.8775i	$Y[1]$
-5.6024 + 0.3927i	$Y[2]$
-4.4049 + 0.4585i	$Y[3]$
-4.4049 - 0.4585i	$Y[4]= Y^*[3]$
-5.6024 - 0.3927i	$Y[5]= Y^*[2]$
-19.9928 -23.8775i	$Y[6]= Y^*[1]$

Uwaga na symetrię Hermite'a widma.

c.d. Właściwości DFT

$$x[n] \Leftrightarrow X[k], \quad y[n] \Leftrightarrow Y[k], \quad n,k = 0,1,\cdots,N-1; \quad W_N \stackrel{\Delta}{=} e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Lp,	Ciąg *N*-punktowy	Właściwość	*N*-punktowa transformata DFT
1	$ax[n] + by[n]$	Liniowość (oba ciągi tej samej długości, w przeciwnym razie zastosować uzupełnianie zerami aż do wyrównania długości)	$aX[k] + bY[k]$
2	$x[[n - n_0]]_N$	Przesunięcie kołowe w dziedzinie *n*; opóźnienie $n_0 > 0$	$X[k]W_N^{kn_0}$
3	$x[n]W_N^{nk_0}$	Modulacja	$X[[k - k_0]]_N$
4	$x[n] \otimes y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[[n-m]]_N$	Splot kołowy w dziedzinie *n,* a mnożenie w dziedzinie *k*	$X[k]Y[k]$
5	$x[n]y[n]$	Mnożenie w dziedzinie *n*, a splot kołowy w dziedzinie *k*	$\frac{1}{N} X[k] \otimes Y[k] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X[l]Y[[k-l]]_N$
6	a) $x^*[n]$ b) $x^*[[-n]]_N$	Sprzężenie	$X^*[[-k]]_N$ $X^*[k]$
7	$X[n]$	Dualizm	$Nx[[-k]]_N$

c.d. Właściwości DFT

Wzór Parsevala o energii $$E = \sum_{n=0}^{N-1} \left| x[n] \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| X[k] \right|^2$$

Notacja macierzowa w obliczeniach DFT i IDFT

Próbki sygnału Próbki widma

$$\left[x_N\right] \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \qquad \left[X_N\right] \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \; k = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\left[X_N\right] = \left[W_N\right]\left[x_N\right]$$ – wzór analizy

$$\left[x_N\right] = \left[W_N\right]^{-1}\left[X_N\right] = \frac{1}{N}\left[W_N^*\right]\left[X_N\right]$$ – wzór syntezy

$$\left[W_N\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} = \left[W_N\right]^T$$

$[\;\;]^T$ transpozycja macierzy

Przykład. N=4, $\{x[n]\}_{n=0}^{3} = \{1, 2, 3, 4\}$

$$[X_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2+j2 \\ -2 \\ -2-j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix}$$

analiza

$$\uparrow$$
$$[W_4]$$

$$[x_4] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -2+j2 \\ -2 \\ -2-j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

synteza

$$\uparrow$$
$$[W_4^*]$$

Przykład. Oblicz wynik splotu liniowego za pomocą splotu kołowego ciągów: $\{x[n]\}_{n=0}^{2} = \{1, -1, 1\}$ i $\{h[n]\}_{n=0}^{1} = \{2, 2\}$.

Najpierw obliczamy długość splotu liniowego $y[n] = x[n] * h[n]$.

Wynosi ona 3+2 – 1=4. Oba ciągi uzupełniamy zerami do długości N=4. Zatem

$$[x_4] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} \qquad [X_4] = [W_4][x_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ 3 \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix}$$

$$[h_4] = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \end{bmatrix} \qquad [H_4] = [W_4][h_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 - j2 \\ 0 \\ 2 + j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H[0] \\ H[1] \\ H[2] \\ H[3] \end{bmatrix}$$

Mnożymy wektory $[X_4]$ i $[H_4]$ element po elemencie

$$[Y_4] = [X_4][H_4] = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ 3 \\ -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2-j2 \\ 0 \\ 2+j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2+j2 \\ 0 \\ 2-j2 \end{bmatrix}$$

i na koniec obliczamy poszukiwany wynik splotu

$$[y_4] = \frac{1}{4}[W_4^*][Y_4] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2+j2 \\ 0 \\ 2-j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Możemy to łatwo sprawdzić szybką metodą obliczania splotu ciągów o skończonej długości, jak poniżej.

$$
\begin{array}{lcccc}
x[n] & & 1. & -1 & 1 \\
h[n] & & & 2. & 2 \\
 & & 2 & -2 & 2 \\
 & 2 & -2 & 2 & \\
y[n] & 2. & 0 & 0 & 2
\end{array}
$$

co należało pokazać. Można też w szybki sposób obliczyć od razu wynik splotu kołowego obu ciągów, rzecz jasna uzupełnionych zerami. (Mnożymy bez przeniesień.)

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & -1 & 1 & 0 & x[n] \\
 & & & 2 & 2 & 0 & 0 & h[n] \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \\
 & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & 2 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \\
\mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \\
 & & & 2 & 2 & 0 & 0 & \\
 & & & \uparrow & \rightarrow & & & \uparrow
\end{array}
$$

$$
\{y[n]\}_{n=0}^{3} = \{2, 0, 0, 2\}
$$

Kopiujemy po prawej lewy pogrubiony trójkąt wyników cząstkowych.

Pierwszą próbkę wyniku końcowego przestawiamy na koniec ciągu $y[n]$.