Widmo zespolonej sinusoidy

Obliczymy widmo zespolonej sinusoidy

A) o długości nieskończonej i

B) o skończonej długości N za pomocą DTFT,

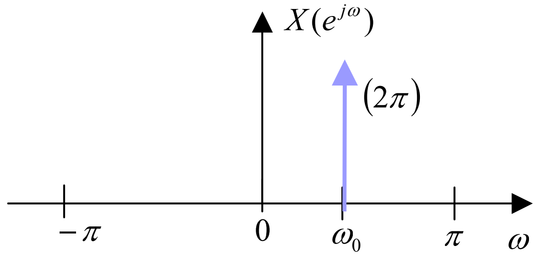
C) następnie widmo tej samej sinusoidy, o długości skończonej, za pomocą N punktowej DFT i na końcu –

D) za pomocą L>N – punktowej DFT z uzupełnianiem ciągu czasowego zerami na końcu (ang. *Zero-padding*) celem zmniejszenia odstępów prążków widma.

Zespolona sinusoida

A. $$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n, \quad -\infty < n < \infty$$

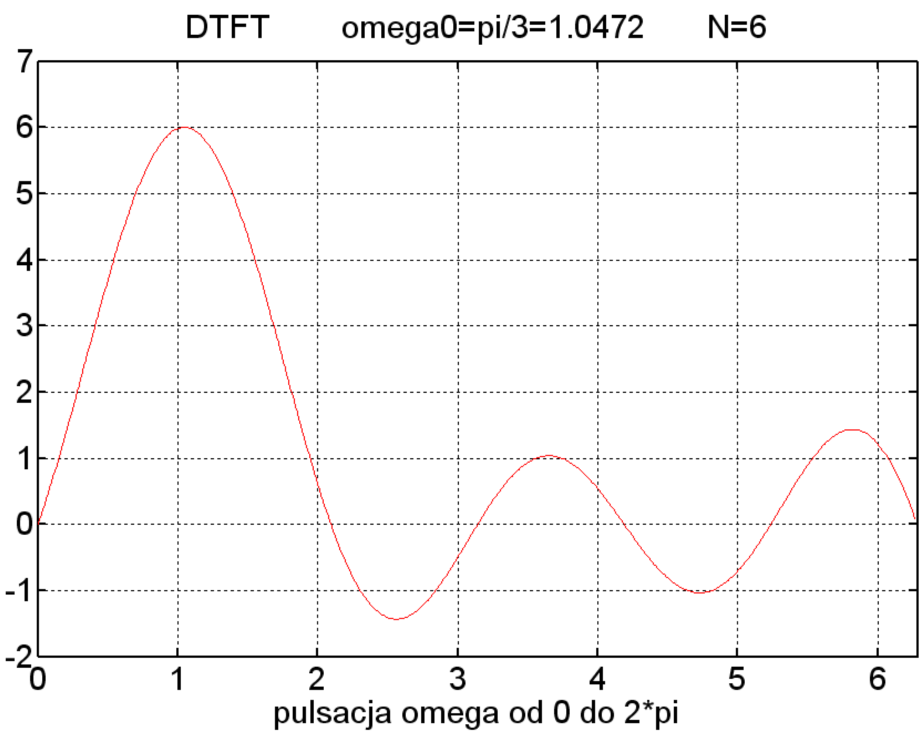
$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0), \quad -\pi \le \omega < \pi \qquad \text{DTFT}$$



B. $$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$X(e^{j\omega}) \overset{\Delta}{=} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega-\omega_0)n} = \frac{1 - e^{-j(\omega-\omega_0)N}}{1 - e^{-j(\omega-\omega_0)}}, \quad -\pi \le \omega < \pi \qquad \text{DTFT}$$

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega-\omega_0)\frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left[(\omega-\omega_0)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[(\omega-\omega_0)\frac{1}{2}\right]}, \quad X(e^{j\omega_0}) = N \quad -\pi \le \omega < \pi$$



Widmo bez czynnika fazowego

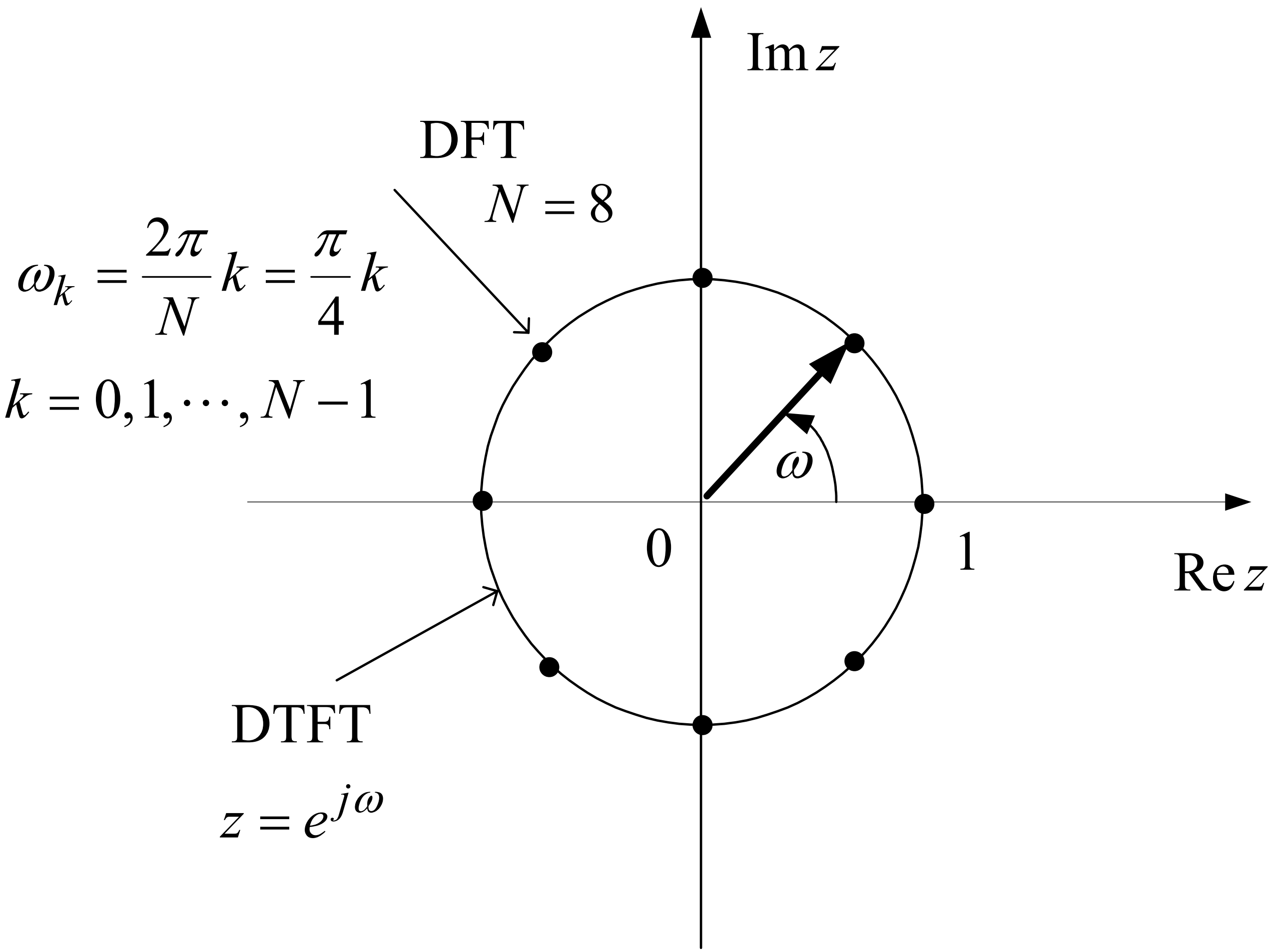
$$X(e^{j\omega})e^{j(\omega-\omega_0)\frac{N-1}{2}} = \frac{\sin\left[(\omega-\omega_0)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[(\omega-\omega_0)\frac{1}{2}\right]}, \quad X(e^{j\omega_0}) = N \quad 0 \le \omega < 2\pi$$

$\text{Interpretacja : Z - tranformata } X(z) \text{ - na plaszczyznie } z,$

$\text{DTFT - } X(e^{j\omega}), \omega \in <-\pi, \pi) \text{ - na okregu jednostkowym,}$

$\text{DFT - } X[k],\ k = 0,1,\cdots,N-1 \text{ - w } N \text{ punktach}$

rownomiernie na okregu jednostkowym.



C. Sygnał ten sam jak w B. $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$

$$X[k] \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$X[k] = e^{-j\left[\left(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0\right)\frac{N-1}{2}\right]} \frac{\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0\right)\frac{1}{2}\right]}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1 \qquad \text{DFT } N\text{-punktowa}$$

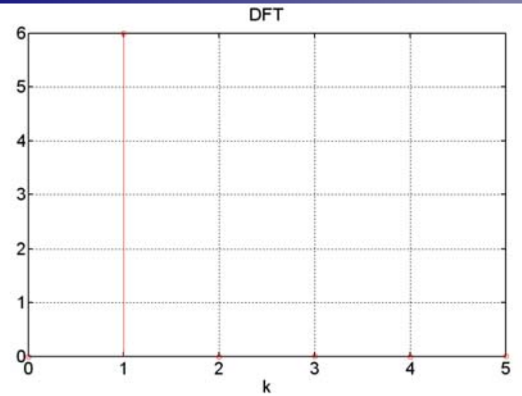
Jeżeli $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}k$ to $k = \omega_0 \frac{N}{2\pi}$ i $X[k]=N$.

Dla pozostałych wartości k dostajemy $X[k]=0$. Wówczas $x[n]$ jest ciągiem okresowym z okresem N ($f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}$ jest wymierna).

W przeciwnym przypadku występuje efekt **przecieku widma** (ang. *spectrum leakage*).

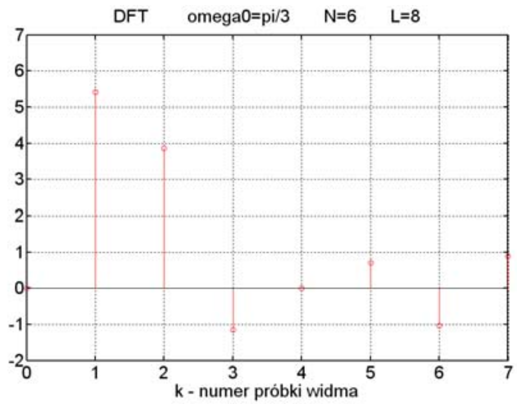
$L=N$

$N=6$



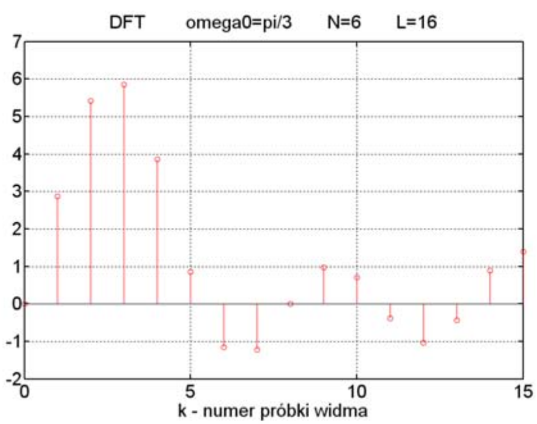
$L>N$

$L=8$



$L>N$

$L=16$




```
% CompSinSpec.m 22.01.2009
% Created Ewa Hermanowiz
fo=22; %fontsize for figures
lo=2; %linewidth for axes
ma=8; %markersize for curves
N=6;
num=0:1:N-1;
x=2*pi*num/N-pi/3;
y=N*diric(x,N);
stem(num,y,'r');
whitebg('white')
hax=gca; set(hax,'fontsize',fo); set(gca,'linewidth',lo);
set(gcf,'color','w'); grid;
title('DFT','fontsize',fo)
xlabel('k','fontsize',fo)
axis([0,N-1,0,N])
```

Ilustracja efektu **przecieku widma** w MATLABie.

Jeżeli $N=T$, a $T=1/f_0$ gdzie $f_0=\omega_0/2\pi$ to nie ma przecieku widma. Np. dla $\omega_0=\pi/3$ jest $f_0=1/6$ i

$N=T=6$.

D. Sygnał ten sam jak w B i C, ale DTF jest teraz $L>N$ punktowa. Wówczas

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{L}kn} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{L}k}, \quad k = 0, 1, \cdots, L-1 \qquad (*)$$

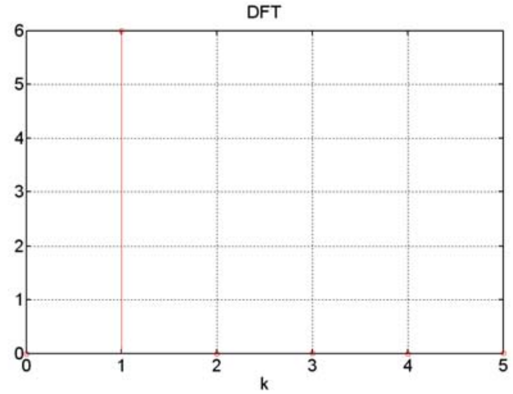
$$X[k] = e^{-j\left[\left(\frac{2\pi}{L}k-\omega_0\right)\frac{N-1}{2}\right]} \frac{\sin\left[\left(\frac{2\pi}{L}k-\omega_0\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\frac{2\pi}{L}k-\omega_0\right)\frac{1}{2}\right]}, \quad k = 0, 1, \cdots, L-1 \qquad \text{DFT } L\text{-punktowa}$$

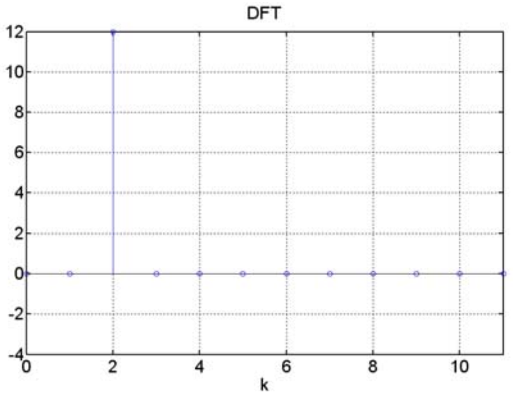
i $X[k]=N$ jeżeli $\omega_0 = \frac{2\pi}{L}k$ itd. jak w punkcie C.

Dzięki uzupełnieniu ciągu $x[n]$ zerami od $n=N+1$ do $n=L$ w obliczeniu DFT po lewej w (*) przez zmianę N na L w czynniku wykładniczym, maleje odstęp pomiędzy sąsiednimi prążkami widma

z $\Delta f = \frac{1}{N}$ do $\Delta f = \frac{1}{L}$ ponieważ $L>N$.

Widmo „zagęszcza" się.





$L=N$

$N=6$

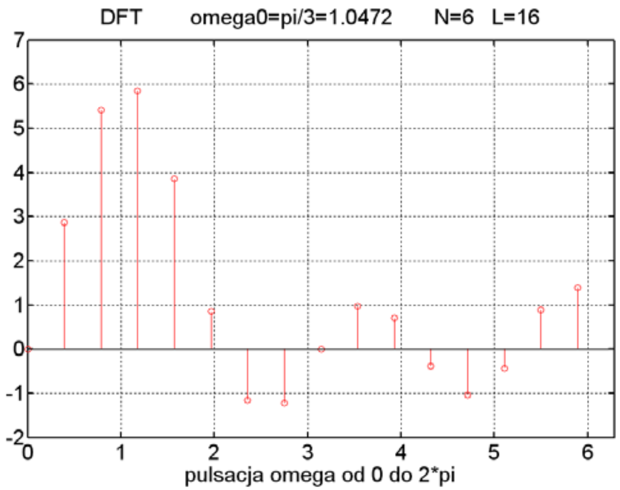
Nie ma przecieku

$L>N$

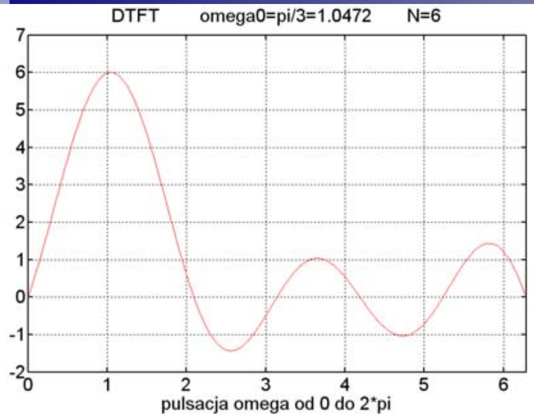
$L=12=2N$

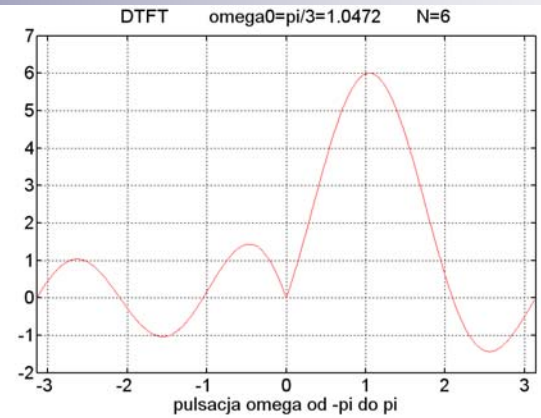
też nie ma przecieku widma

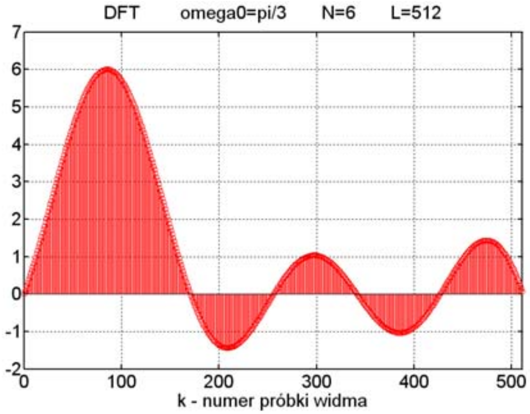
Jeszcze raz przeciek widma dla N=6 i L=16, ale w funkcji pulsacji zamiast w funkcji k.

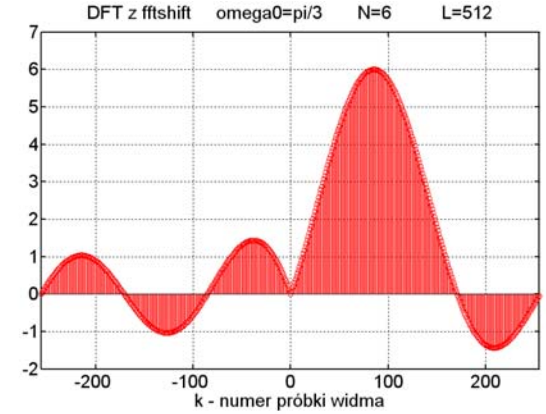


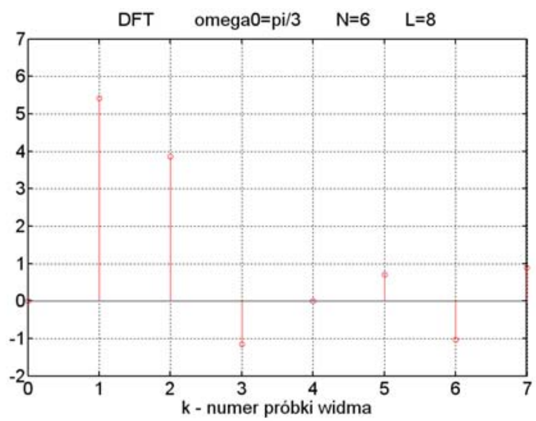
omega0=Pi/3=1.0472 jak poprzednio

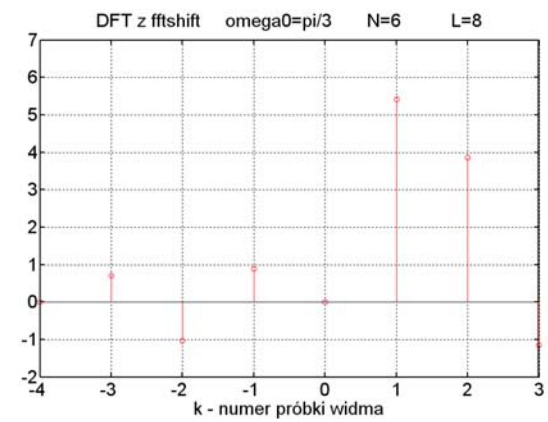




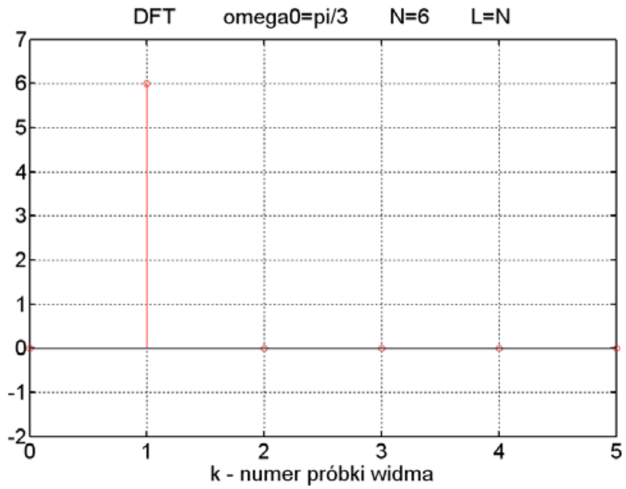


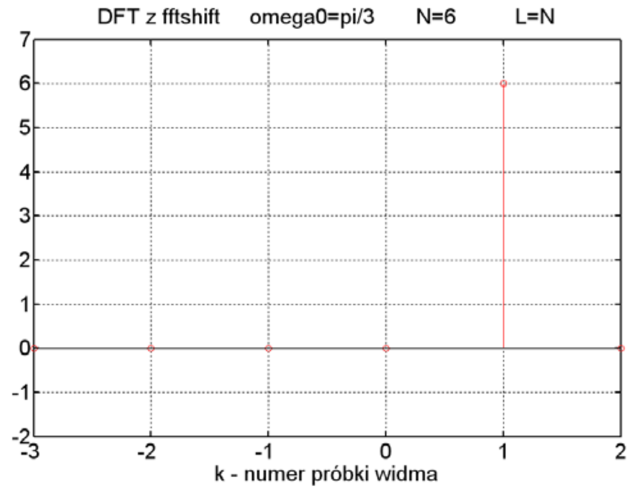




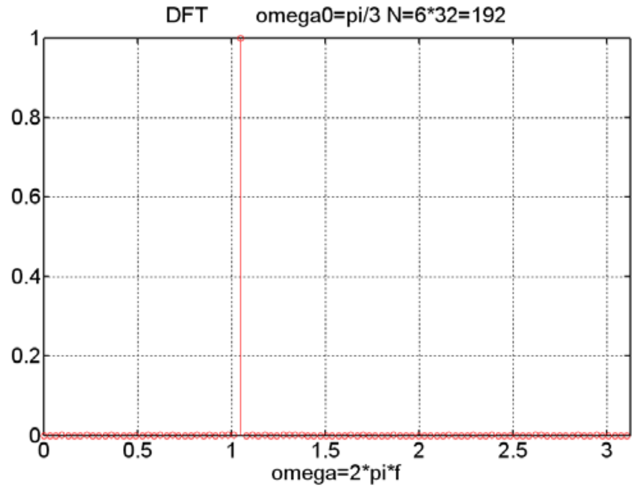


W kolumnie prawej mamy widmo z użyciem funkcji fftshift, a więc prezentowane na osi pulsacji od **–pi do pi**, zamiast od **0 do 2*pi**, jak jest w kolumnie lewej.


DFT omega0=pi/3 N=6 L=N
k - numer próbki widma


DFT z fftshift omega0=pi/3 N=6 L=N
k - numer próbki widma

Jeszcze raz przeciek widma dla N=L, ale większe N



omega0=Pi/3=1.0472