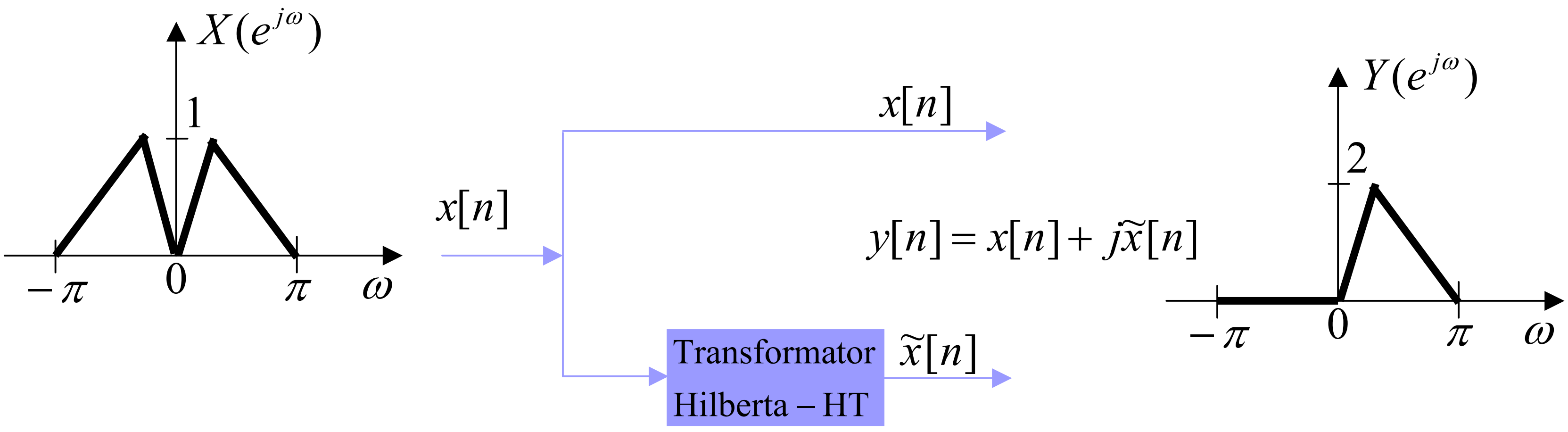
Filtry specjalne

ang. *Special Filters*

Do filtrów specjalnych zaliczamy m.in. transformator Hilberta, filtr Hilberta, filtr różniczkujący, filtr grzebieniowy (ang. *comb filter*) i inne.

Filtr Hilberta



Transformator Hilberta – idealny

$$H_{\mathrm{HT}}(e^{j\omega}) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} -j, & 0<\omega<\pi \\ j, & -\pi<\omega<0 \end{cases}$$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H_{\mathrm{HT}}(e^{j\omega})$$

Filtr Hilberta – idealny – cel: uzyskanie widma prawostronnego dla y[n]

(oszczędna reprezentacja widmowa sygnału – patrz SSB (ang. *Single-Side-Band*)

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + j\tilde{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\left[1 + jH_{\mathrm{HT}}(e^{j\omega})\right] = X(e^{j\omega})\left[1 + j\begin{cases} -j, & 0<\omega<\pi \\ j & -\pi<\omega<0 \end{cases}\right] =$$

$$= \begin{cases} 2X(e^{j\omega}), & 0<\omega<\pi \\ 0, & -\pi<\omega<0 \end{cases}$$

Przykłady

$$x[n] = a\cos(\omega_0 n) = \frac{a}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{a}{2}e^{-j\omega_0 n}$$

$$\tilde{x}[n] = -j\frac{a}{2}e^{j\omega_0 n} + j\frac{a}{2}e^{-j\omega_0 n} = a\sin(\omega_0 n)$$

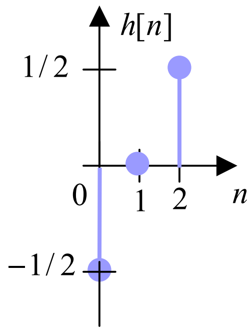
$$y[n] = x[n] + j\tilde{x}[n] = ae^{j\omega_0 n}$$

$$x[n] = a\sin(\omega_0 n) = \frac{a}{2j}e^{j\omega_0 n} - \frac{a}{2j}e^{-j\omega_0 n}$$

$$\tilde{x}[n] = -j\frac{a}{2j}e^{j\omega_0 n} - j\frac{a}{2j}e^{-j\omega_0 n} = -a\cos(\omega_0 n)$$

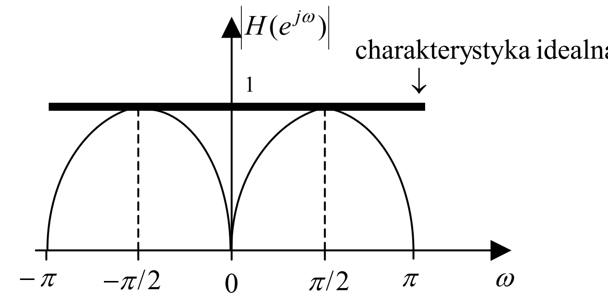
$$y[n] = x[n] + j\tilde{x}[n] = ae^{j(\omega_0 n - \pi/2)}$$

Przykład odpowiedzi impulsowej i charakterystyki amplitudowo-fazowej HT



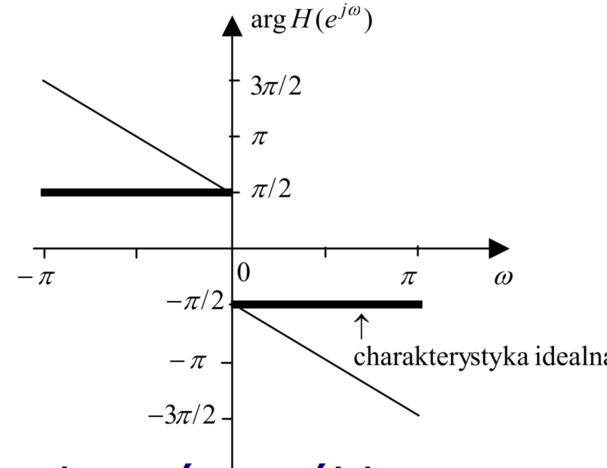
$$h[n]=\left\{-\frac{1}{2},\,0,\,\frac{1}{2}\right\} \overset{\text{DTFT}}{\Leftrightarrow} H(e^{j\omega})=-je^{-j\omega}\sin\omega$$

Charakterystyka amplitudowa



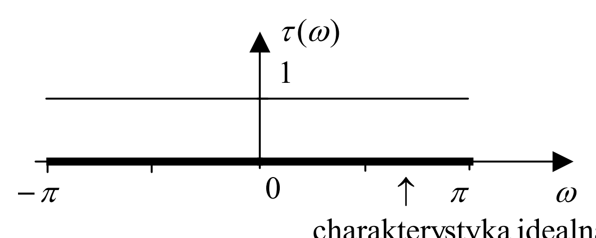
$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\left|\sin\omega\right|$$

Charakterystyka fazowa



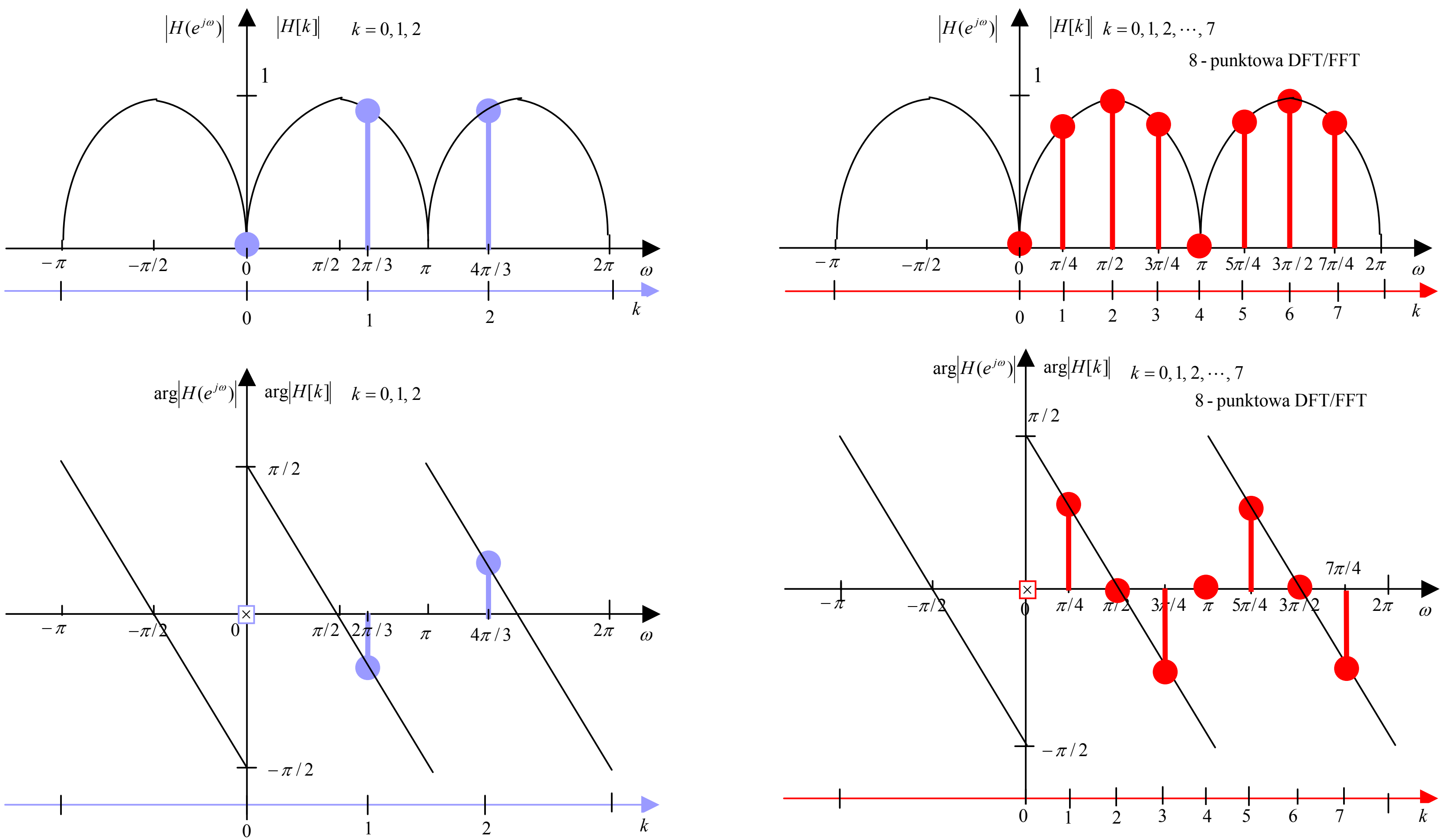
$$\arg H(e^{j\omega})=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}-\omega, & 0<\omega<\pi\\ \dfrac{\pi}{2}-\omega, & -\pi<\omega<0\end{cases}$$

Charakterystyka opóźnieniowa w liczbie odstępów próbkowania



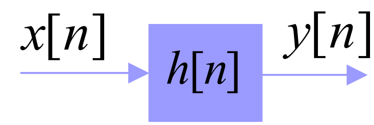
$$\tau(\omega)=-\frac{\mathrm{d}\arg H(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega}=1$$

Przykłady charakterystyk: amplitudowej i fazowej HT, obliczonych z DFT/FFT 3 – punktowej i 8 – punktowej, w porównaniu z DTFT

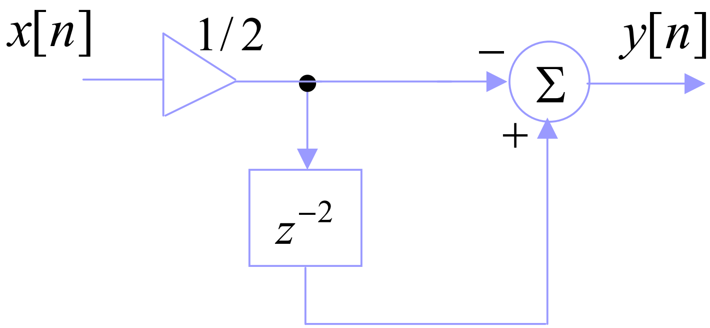


Przykład. Obliczymy odpowiedź $y[n]$ HT o odpowiedzi impulsowej $h[n]$ na pobudzenie $x[n]$, gdzie

$$h[n] = \left\{-\frac{1}{2},\, 0,\, \frac{1}{2}\right\}_{n=0}^{2} \qquad x[n] = A\cos(\omega_0 n),\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$



Schemat HT – struktura FIR i jej algorytm



$$y[n] = \frac{1}{2}\left(-x[n] + x[n-2]\right)$$

Zatem tu $\quad y[n] = \frac{1}{2}\left(-x[n] + x[n-2]\right) = \frac{A}{2}\left\{-\cos(\omega_0 n) + \cos\left[\omega_0 (n-2)\right]\right\}_{\omega_0 = \frac{\pi}{2}}$

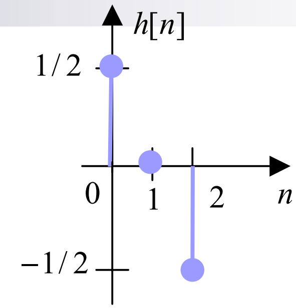
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$y[n] = \frac{A}{2}\left\{-\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)\right\} = A\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$$

Wynik opóźniony o 1 odstęp próbkowania zgodnie z charakterystyką opóźnieniową (system przyczynowy). Porównaj z wynikiem idealnym

$\tilde{x}[n] = a\sin(\omega_0 n); \quad a = \mathrm{A}; \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2}$ – slajd No 3.

Filtr różniczkujący



Filtr różniczkujący R – idealny

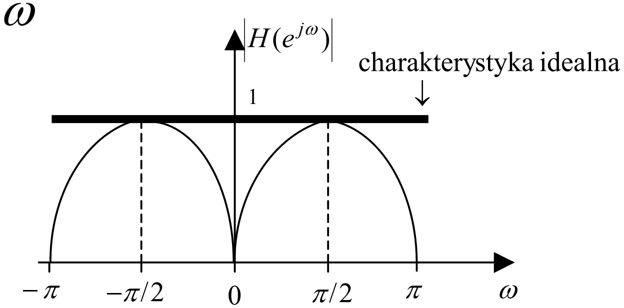
$$H_R(e^{j\omega}) \stackrel{\Delta}{=} j\omega, \quad |\omega| < \pi$$

Przykład odpowiedzi impulsowej i charakterystyki amplitudowo-fazowej R

$$h[n] = \left\{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right\} \quad \stackrel{\text{DTFT}}{\Leftrightarrow} \quad H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega}\sin\omega$$

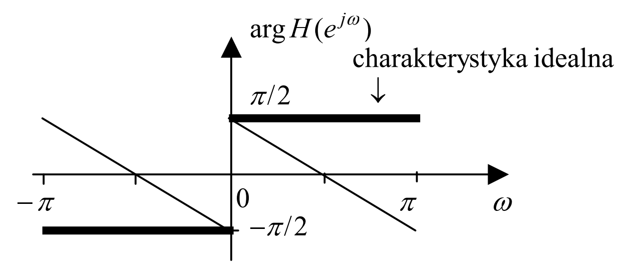
Charakterystyka amplitudowa

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = |\sin\omega|$$



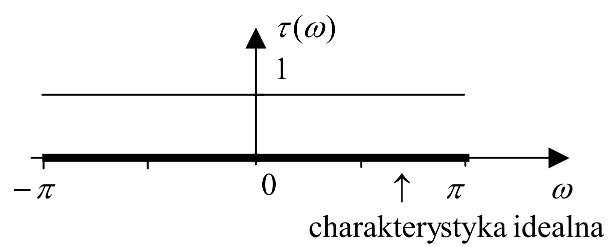
Charakterystyka fazowa

$$\arg H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \omega, & 0 < \omega < \pi \\ -\dfrac{\pi}{2} - \omega, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$



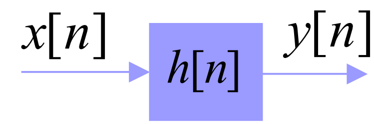
Charakterystyka opóźnieniowa

$$\tau(\omega) = -\frac{\mathrm{d}\arg H(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega} = 1$$

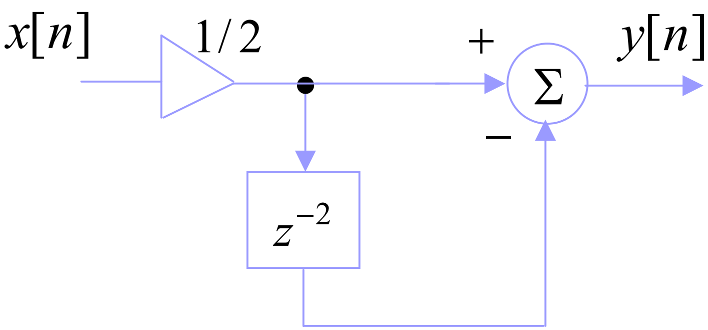


Przykład. Obliczymy odpowiedź $y[n]$ systemu różniczkującego R o odpowiedzi impulsowej $h[n]$ na pobudzenie $x[n]$, gdzie

$$h[n]=\left\{\frac{1}{2},\,0,\,-\frac{1}{2}\right\}_{n=0}^{2} \qquad x[n]=A\cos(\omega_0 n),\;\; n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots, \qquad \omega_0=\frac{\pi}{2}$$



Schemat systemu różniczkującego R – struktura FIR i jej algorytm



$$y[n]=\frac{1}{2}\big(x[n]-x[n-2]\big)$$

Zatem tu $\quad y[n]=\dfrac{1}{2}\big(x[n]-x[n-2]\big)=\dfrac{A}{2}\{\cos(\omega_0 n)-\cos[\omega_0(n-2)]\}\Big|_{\omega_0=\frac{\pi}{2}}$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}=-\sin x$$

$$y[n]=\frac{A}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)\right\}=-A\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-A\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$$

Wynik opóźniony o 1 odstęp próbkowania zgodnie z charakterystyką opóźnieniową (system przyczynowy).

Transformator Hilberta HT i filtr różniczkujący R mają w powyższych przykładach identyczne charakterystyki amplitudowe i opóźnieniowe, ale inne są charakterystyki fazowe. Oba przykładowe filtry o 3 – punktowej odpowiedzi impulsowej są ukierunkowane na estymację transformaty Hilberta – HT i estymację (cyfrową) pochodnej – R sygnału sinusoidalnego o pulsacji

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2}\ .$$

Filtr grzebieniowy

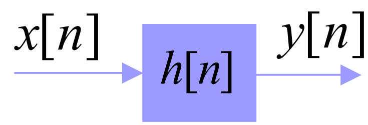
Filtr grzebieniowy G – idealny

Wariant G1

$$H_1(z) = \frac{1}{2}\left(1 + z^{-M}\right)$$

$$h_1[n] = \frac{1}{2}\{\delta[n] + \delta[n-M]\}$$

$$y_1[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[n-M]\}$$

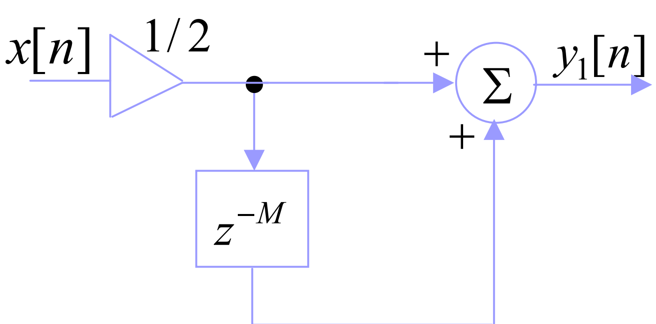


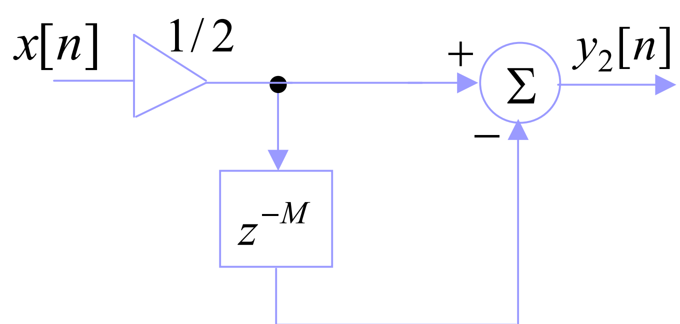
Wariant G2

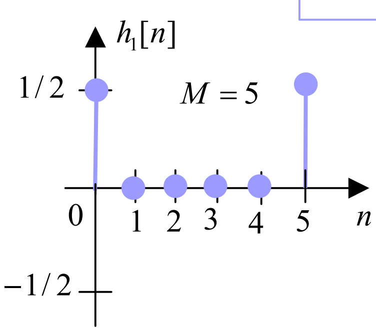
$$H_2(z) = \frac{1}{2}\left(1 - z^{-M}\right)$$

$$h_2[n] = \frac{1}{2}\{\delta[n] - \delta[n-M]\}$$

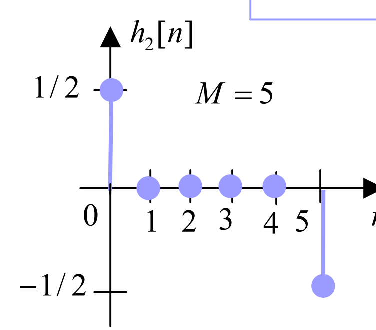
$$y_2[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[n-M]\}$$







Przykładowo dla ***M*=5**



Przykład. Obliczymy odpowiedź $y[n]$ filtru grzebieniowego G o odpowiedzi impulsowej $h[n]$ na pobudzenie $x[n]$, gdzie M=5 i

$$x[n]=1+\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)+\cos(\pi n),\ \ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

Obliczenia dla wariantu G1

$$y_1[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[n-M]\}=\frac{1}{2}\left\{1+\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)+\cos(\pi n)\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{1+\cos\left(\frac{\pi}{5}(n-5)\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}(n-5)\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}(n-5)\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}(n-5)\right)+\cos(\pi(n-5))\right\}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$y_1[n]=1-\cos\left(\frac{2\pi}{5}(n-5/2)\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}(n-5/2)\right)=1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

Obliczenia dla wariantu G2

$$y_2[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[n-M]\}=\frac{1}{2}\left\{1+\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)+\cos(\pi n)\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{1+\cos\left(\frac{\pi}{5}(n-5)\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}(n-5)\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}(n-5)\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}(n-5)\right)+\cos(\pi(n-5))\right\}$$

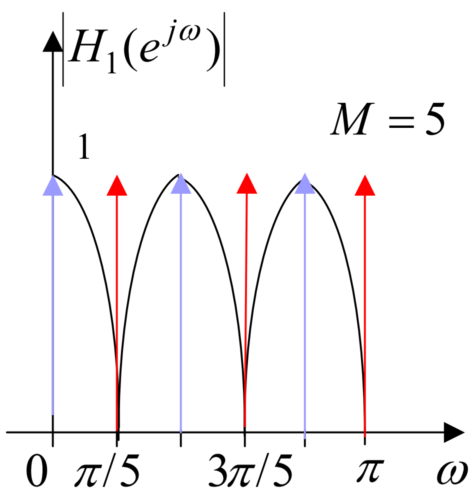
$$y_2[n]=-\sin\left(\frac{\pi}{5}(n-5/2)\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{5}(n-5/2)\right)-\sin(\pi(n-5/2))=\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right)+\cos(\pi n)$$

$$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right) + \cos(\pi n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Zatem

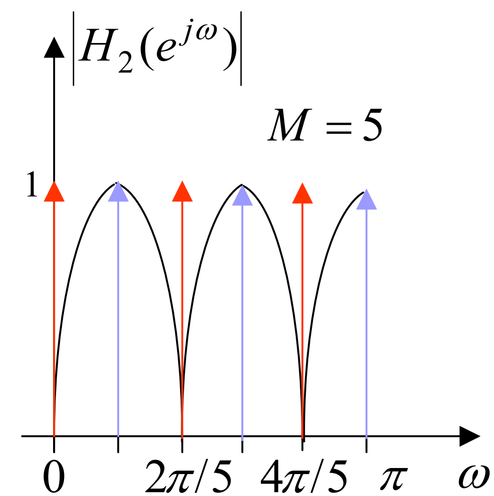
Wariant G1

$$y_1[n] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$



Wariant G2

$$y_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + \cos(\pi n)$$



Zastosowania filtru: usuwanie częstotliwości sieci z harmonicznymi np. w EEG i in. aplikacjach, efekty akustyczne, np. pogłos (ang. flanging), fazowanie (ang. phasing) etc.