Zbiory przybliżone, cz. 1

(wersja do druku)

dr. Piotr Szczuko

Katedra Systemów Multimedialnych

2009

Plan wykładu

- Historia zbiorów przybliżonych
- System informacyjny i decyzyjny
- Reguły decyzyjne
- Tożsamość obiektów
  - Relacja równoważności
  - Klasa abstrakcji
  - Przykład
- Aproksymacja zbioru – przybliżenie zbioru
  - Dolna i górna aproksymacja zbioru
  - Przykład
- Obszar brzegowy i zewnętrzny, dokładność przybliżenia
- Własności zbiorów przybliżonych
- Kategorie zbiorów przybliżonych
  - Przykłady

Zbiory przybliżone

Teoria zbiorów przybliżonych (Rough Set) – **Zdzisław Pawlak**:

- Z. Pawlak, (1982), *Rough sets*. International Journal of Computer and Information Sciences 11, pp. 341–356.
- W. Marek, Z. Pawlak (1984), *Rough sets and information systems*. Fundamenta Informaticae 17, pp. 105–115.
- Z. Pawlak (1991), *Rough Sets – Theoretical Aspects of Reasoning about Data*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Zbiory przybliżone

- Teoria zbiorów przybliżonych zajmuje się klasyfikacją danych zorganizowanych w postaci tabel. Dane uzyskane mogą być z pomiarów, testów lub od ekspertów.
- Głównym celem analizy danych jest wyznaczenie aproksymacji idei (koncepcji) na podstawie danych w celu:
  - Dokładnej analizy problemu, związków, zależności
  - Uzyskania narzędzia klasyfikującego nowe przypadki

System informacyjny

System informacyjny $\mathcal{A}$:

- Wiersze to obiekty
- Kolumny to atrybuty

Inaczej:

$$\mathcal{A} = (U, A)$$

gdzie:

U – zbiór obiektów (uniwersum)

A – zbiór odwzorowań a: $U \rightarrow V_a$

(obiektowi przypisana jest wartość V_a atrybutu a)

	Age	$LEMS$
x_1	16-30	50
x_2	16-30	0
x_3	31-45	1-25
x_4	31-45	1-25
x_5	46-60	26-49
x_6	16-30	26-49
x_7	46-60	26-49

x_3 i x_4 nierozróżnialne

x_5 i x_7 nierozróżnialne

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

System decyzyjny

System decyzyjny = System informacyjny + decyzja:

$$\mathcal{A} = (U, A \cup \{d\})$$

gdzie:

d – atrybut decyzyjny

$$d \notin A$$

	Age	$LEMS$	$Walk$
x_1	16-30	50	Yes
x_2	16-30	0	No
x_3	31-45	1-25	No
x_4	31-45	1-25	Yes
x_5	46-60	26-49	No
x_6	16-30	26-49	Yes
x_7	46-60	26-49	No

x_3 i x_4 różne decyzje

x_5 i x_7 takie same decyzje

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Reguły decyzyjne

	Age	*LEMS*	*Walk*
x_1	16-30	50	Yes
x_2	16-30	0	No
x_3	31-45	1-25	No
x_4	31-45	1-25	Yes
x_5	46-60	26-49	No
x_6	16-30	26-49	Yes
x_7	46-60	26-49	No

Zdania logiczne o postaci:

IF *Age*=„16-30” AND *LEMS*=„0” THEN *Walk*=„No”

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Tożsamość obiektów

	Age	*LEMS*	*Walk*
x_1	16-30	50	Yes
x_2	16-30	0	No
x_3	31-45	1-25	No
x_4	31-45	1-25	Yes
x_5	46-60	26-49	No
x_6	16-30	26-49	Yes
x_7	46-60	26-49	No

Obiekty x_3 i x_4 (także x_5 i x_7) są nierozróżnialne (tożsame) względem pewnego zbioru atrybutów:

$$B \subseteq A$$

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Tożsamość obiektów(1)

Przyjmijmy system informacyjny: $\mathcal{A} = (U, A)$

Z każdym zbiorem atrybutów: $B \subseteq A$ związana jest relacja:

$$IND_{\mathcal{A}}(B) = \{(x, x') \in U^2 \mid \forall a \in B \;\; a(x)=a(x')\}$$

<u>Jest to relacja równoważności</u>

(ang. *Indiscernibility*)

Relacja R jest relacją równoważności:

(xRx) lub $(x,x) \in R$ – zwrotna,

jeżeli (xRy) to (yRx) – symetryczna,

jeżeli (yRx) i (yRz) to $(\mathrm{x}Rz)$ – przechodnia.

Tożsamość obiektów(2)

$$IND(B) = \{(x, x') \in U^2 \mid \forall a \in B \;\; a(x)=a(x')\}$$

Jeżeli:

$$(x, x') \in IND(B)$$

to x i x' są <u>tożsame względem relacji $IND(B)$</u>, nierozróżnialne względem atrybutów B.

Tożsamość obiektów(3)

$(x,x) \in IND(B)$ – zwrotna,

jeżeli $(x,y) \in IND(B)$ to $(y,x) \in IND(B)$ – symetryczna,

jeżeli $(x,y) \in IND(B)$ i $(y,z) \in IND(B)$ to $(x,z) \in IND(B)$ – przechodnia.

x

y

z

Jaki jest zbiór atrybutów B w tym przypadku?

Tożsamość obiektów(4)

$[x]_B$ – <u>klasa abstrakcji (równoważności)</u>
obiektu x względem relacji $IND(B)$

x

y

Klasa równoważności $[x]_B$ –
wszystkie obiekty czerwone

$$[x]_B \equiv [y]_B$$

z

Klasa równoważności $[z]_B$ –
wszystkie obiekty zielone

Przykład

Niepuste podzbiory A:

$B_1=\{Age\}$

$B_2=\{LEMS\}$

$B_3=\{Age,LEMS\}$

	Age	$LEMS$	$Walk$
x_1	16-30	50	Yes
x_2	16-30	0	No
x_3	31-45	1-25	No
x_4	31-45	1-25	Yes
x_5	46-60	26-49	No
x_6	16-30	26-49	Yes
x_7	46-60	26-49	No

Sposoby podziału uniwersum U:

$$IND(\{Age\}) = \{\{x_1; x_2; x_6\}; \{x_3; x_4\}; \{x_5; x_7\}\}$$

$$IND(\{LEMS\}) = \{\{x_1\}; \{x_2\}; \{x_3; x_4\}; \{x_5; x_6; x_7\}\}$$

$$IND(\{Age,LEMS\}) = \{\{x_1\}; \{x_2\}; \{x_3; x_4\}; \{x_5; x_7\}; \{x_6\}\}$$

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Aproksymacja zbioru (1)

- Relacja równoważności prowadzi do podziału uniwersum na tzw. **zbiory elementarne**. Każda kombinacja zbiorów elementarnych – **zbiór definiowalny**. Rodzina zbiorów definiowalnych oznaczana jest $Def(B)$.
- Wyznaczone podziały posłużyć mogą do utworzenia podzbiorów uniwersum

- Zwykle poszukiwane są podzbiory definiowalne charakteryzujące się taką samą wartością atrybutu decyzyjnego.

Tożsame obiekty – różne atrybuty decyzyjne!

	Age	*LEMS*	*Walk*
x_1	16-30	50	Yes
x_2	16-30	0	No
x_3	31-45	1-25	No
x_4	31-45	1-25	Yes
x_5	46-60	26-49	No
x_6	16-30	26-49	Yes
x_7	46-60	26-49	No

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Aproksymacja zbioru (2)

- Pomimo niejednoznaczności możliwe jest określenie, które obiekty na pewno **należą** do poszukiwanego podzbioru, które na pewno do niego **nie należą**, a które leżą na granicy między podzbiorami.

	Age	*LEMS*	*Walk*
x_1	16-30	50	Yes
x_2	16-30	0	No
x_3	31-45	1-25	No
x_4	31-45	1-25	Yes
x_5	46-60	26-49	No
x_6	16-30	26-49	Yes
x_7	46-60	26-49	No

- Jeżeli jakiekolwiek obiekty leżą na granicy, mamy do czynienia ze **zbiorem przybliżonym**

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Notacja

Przyjmijmy:

System informacyjny: $\mathcal{A} = (U, A)$

Podzbiór atrybutów: $B \subseteq A$

oraz podzbiór uniwersum: $X \subseteq U$

Możliwa jest aproksymacja zbioru X wyłącznie przez wykorzystanie atrybutów ze zbioru B, poprzez określenie B-*dolnej* i B-*górnej* aproksymacji zbioru X:

$\underline{B}X = \{ x \mid [x]_B \subseteq X\}$ $\overline{B}X = \{ x \mid [x]_B \cap X \neq \emptyset\}$

Przykład (1)

$\underline{B}X = \{ x \mid [x]_B \subseteq X\}$

Te x, których klasy abstrakcji są zawarte w X. Obiekty x_1 i x_6. Obiekty na pewno należące do X w oparciu o wiedzę zawartą w B.

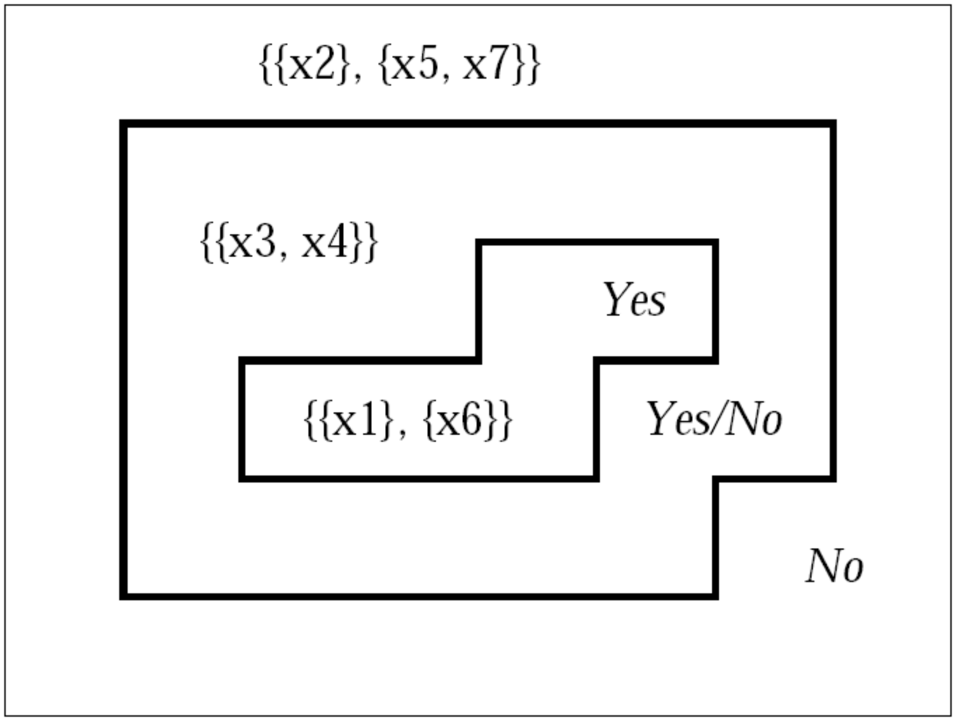
$\overline{B}X = \{ x \mid [x]_B \cap X \neq \emptyset\}$

Te x, których klasy abstrakcji mają niepustą część wspólną z X. Obiekty x_1, x_3, x_4, i x_6. Obiekty prawdopodobnie należące do X w oparciu o wiedzę zawartą w B.

	Age	$LEMS$	$Walk$
x_1	16-30	50	Yes
x_2	16-30	0	No
x_3	31-45	1-25	No
x_4	31-45	1-25	Yes
x_5	46-60	26-49	No
x_6	16-30	26-49	Yes
x_7	46-60	26-49	No

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Przykład (2)



	Age	*LEMS*	*Walk*
x_1	16-30	50	Yes
x_2	16-30	0	No
x_3	31-45	1-25	No
x_4	31-45	1-25	Yes
x_5	46-60	26-49	No
x_6	16-30	26-49	Yes
x_7	46-60	26-49	No

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Obszar brzegowy i zewnętrzny zbioru

$$BN_B(X) = \overline{B}X - \underline{B}X$$

„Boundry” - BN

Te x, co do których nie można jednoznacznie zdecydować czy należą czy też nie do zbioru X. Obiekty x_3, x_4.

$$EXT_B(X) = U - \overline{B}X$$

Te x, które z całą pewnością nie należą do zbioru X. Obiekty x_2, x_5, x_7.

	Age	*LEMS*	*Walk*
x_1	16-30	50	Yes
x_2	16-30	0	No
x_3	31-45	1-25	No
x_4	31-45	1-25	Yes
x_5	46-60	26-49	No
x_6	16-30	26-49	Yes
x_7	46-60	26-49	No

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Dokładność przybliżenia

$$\alpha_B(X) = \frac{|\underline{B}X|}{|\overline{B}X|}$$

| . | - moc zbioru

$0 \leq \alpha_B(X) \leq 1$

Zbiór tradycyjny $\alpha_B(X) = 1$

Zbiór przybliżony $\alpha_B(X) < 1$

$$\alpha_B(X) = \frac{|\underline{B}X|}{|\underline{B}X| + |BN_B(X)|}$$

Własności

1) $\underline{B}X \subseteq X \subseteq \overline{B}X$

2) $\underline{B}U = U = \overline{B}U$

3) $\underline{B}\varnothing = \varnothing = \overline{B}\varnothing$

4) $\underline{B}\,\underline{B}X = \overline{B}\,\underline{B}X = \underline{B}X$

5) $\overline{B}\,\overline{B}X = \underline{B}\,\overline{B}X = \overline{B}X$

6) $\overline{B}(-X) = -\underline{B}X$

7) $\underline{B}(-X) = -\overline{B}X$

8) $\overline{B}(X \cup Y) = \overline{B}X \cup \overline{B}Y$

9) $\overline{B}(X \cap Y) = \underline{B}X \cap \underline{B}Y$

10) $\underline{B}(X \cup Y) \supseteq \underline{B}X \cup \underline{B}Y$

11) $\underline{B}(X \cap Y) \subseteq \underline{B}X \cap \underline{B}Y$

12) $BN(X \cup Y) \subseteq BNX \cup BNY$

13) $BNX = BN(-X)$

14) $\underline{B}(BNX) = \varnothing$

15) $\overline{B}(BNX)=BNX$

16) $BNX= \varnothing \Leftrightarrow \underline{B}X=X$

$-X$ oznacza $U-X$

Kategorie zbiorów przybliżonych

- X jest w <u>przybliżeniu</u> B-*definiowalny*, gdy:
  $\underline{B}(X) \neq \emptyset$ i $\overline{B}(X) \neq U$

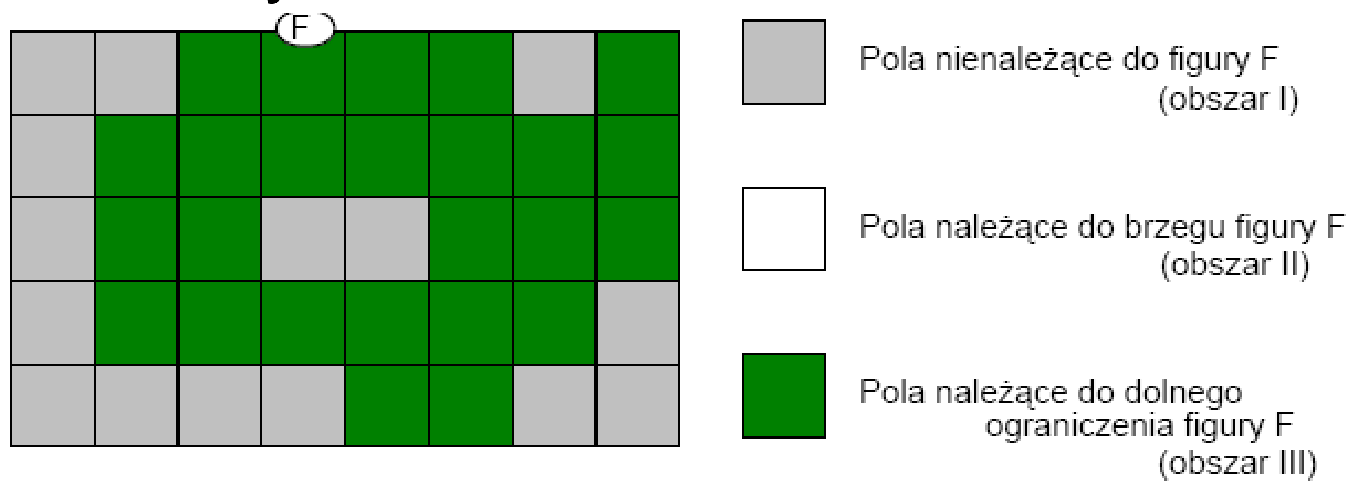
- X jest <u>wewnętrznie</u> B-***nie**definiowalny*, gdy:
  $\underline{B}(X) = \emptyset$ i $\overline{B}(X) \neq U$

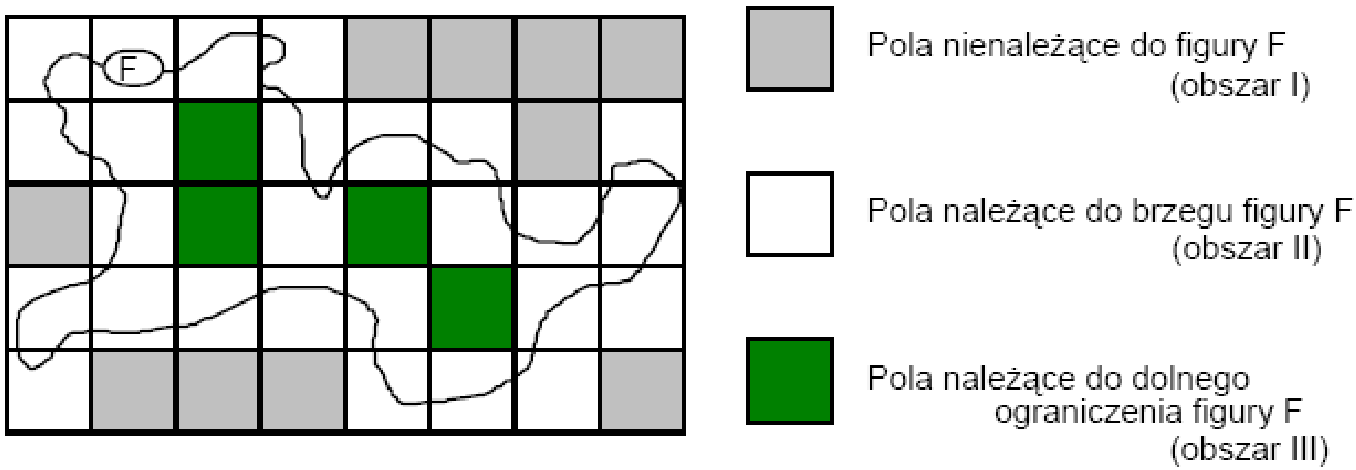
- X jest <u>zewnętrznie</u> B-***nie**definiowalny*, gdy:
  $\underline{B}(X) \neq \emptyset$ i $\overline{B}(X) = U$

- X jest <u>całkowicie</u> B-***nie**definiowalny*, gdy:
  $\underline{B}(X) = \emptyset$ i $\overline{B}(X) = U$

Przykład (1)

Zbiór definiowalny

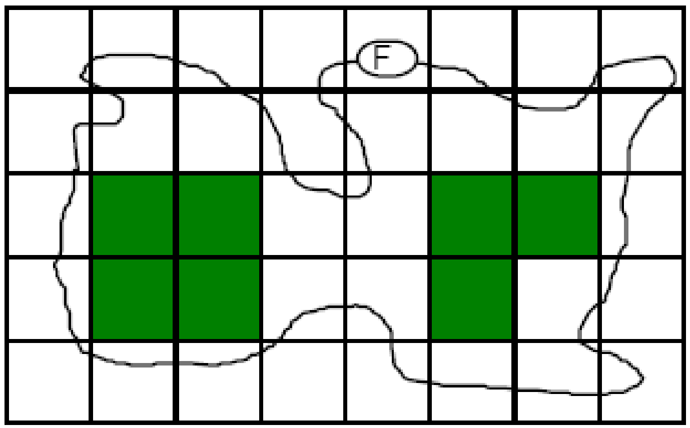




Zbiór przybliżony, w przybliżeniu B-definiowalny

Przykład (2)

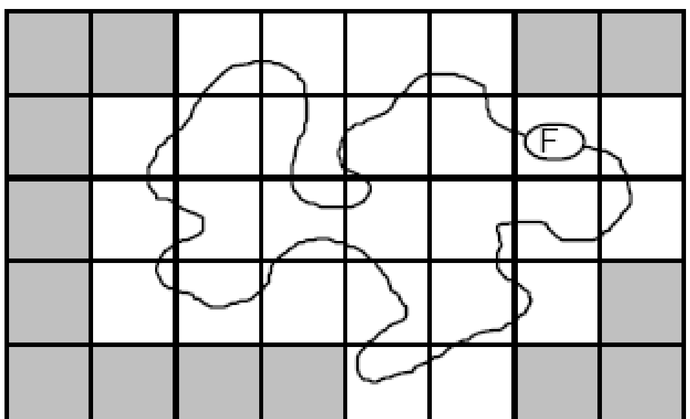
Zbiór przybliżony, wewnętrznie B-definiowalny



Pola nienależące do figury F (obszar I)

Pola należące do brzegu figury F (obszar II)

Pola należące do dolnego ograniczenia figury F (obszar III)



Pola nienależące do figury F (obszar I)

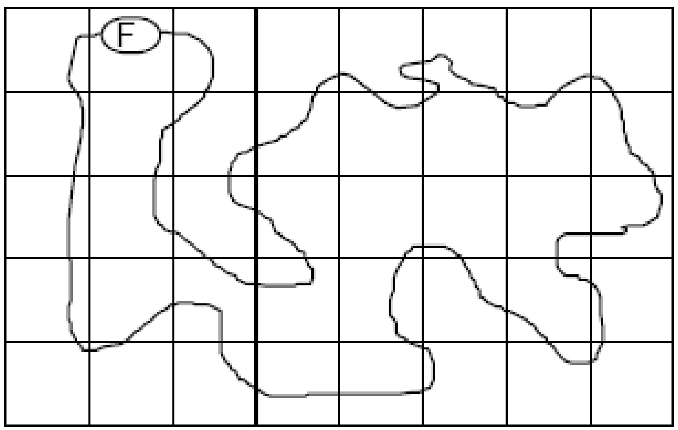
Pola należące do brzegu figury F (obszar II)

Pola należące do dolnego ograniczenia figury F (obszar III)

Zbiór przybliżony, zewnętrznie B-definiowalny

Przykład (3)

Zbiór przybliżony, całkowicie B-niedefiniowalny



Pola nienależące do figury F (obszar I)

Pola należące do brzegu figury F (obszar II)

Pola należące do dolnego ograniczenia figury F (obszar III)

Przykład (4)

	Age	*Walk*
x_1	16-30	Yes
x_2	16-30	No
x_3	31-45	No
x_4	31-45	Yes
x_5	46-60	No
x_6	16-30	Yes
x_7	46-60	No

***Walk*=*No*, zbiór przybliżony wewnętrznie *B*-definiowalny *B*={*Age*}**

	LEMS	*Walk*
x_1	50	Yes
x_2	0	No
x_3	1-25	No
x_4	1-25	Yes
x_5	26-49	No
x_6	26-49	Yes
x_7	26-49	No

***Walk*=*Yes*, zbiór przybliżony *B*-definiowalny, *B*={*LEMS*},**
***Walk*=*No*, zbiór przybliżony *B*-definiowalny, *B*={*LEMS*},**

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Przykład (5)

	Age	*LEMS*	*Walk*
x_1	16-30	50	Yes
x_2	16-30	0	No
x_3	31-45	1-25	No
x_4	31-45	1-25	Yes
x_5	46-60	26-49	No
x_6	16-30	26-49	Yes
x_7	46-60	26-49	No

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Przykład (6)

Subiektywne postrzeganie kolorów

	R	G	B	Czerwony?
	240	70	70	**TAK**
	255	0	60	**TAK**
	255	130	150	NIE
	180	0	0	NIE
	220	20	20	**TAK**
	220	40	80	NIE
	240	20	100	**TAK**
	240	20	130	NIE

Zbiory przybliżone, cz. 2

(wersja do druku)

dr. Piotr Szczuko

Katedra Systemów Multimedialnych

2009

Plan wykładu

- Redukty
- Macierz rozróżnialności
- Funkcja rozróżnialności
- Rozróżnialność względem k-tego obiektu
- Decyzja, klasa decyzyjna
- Obszar B-pozytywny
- Przybliżona przynależność do zbioru
- Zbiory przybliżone o zmiennej precyzji
- Dyskretyzacja parametrów
- Generowanie i wykorzystanie reguł decyzyjnych do klasyfikacji
- Systemy decyzyjne - RSES

Wprowadzenie

Pokazano (cz.1 wykładu), że:

– Obiekty pozostające w relacji $IND(B)$ są ze sobą tożsame

– Grupa obiektów tożsamych, reprezentowana może być przez klasę abstrakcji $[x]_B$,
(B-kolor, x – obiekt czerwony, $[x]_B$ – wszystkie obiekty o kolorze x'a, czyli wszystkie czerwone)

– Podzbiór atrybutów $B \subseteq A$ dzieli uniwersum na zbiory elementarne, wykorzystywane do aproksymacji zbioru X, charakteryzującego się poszukiwaną cechą
(wartością atrybutu decyzyjnego, np. Walk=Yes)

– Atrybuty B generują *B-dolną* i *B-górną* aproksymację zbioru

Notacja

Przyjmijmy:

System informacyjny: $\mathcal{A} = (U, A)$

Podzbiór atrybutów: $B \subseteq A$

oraz podzbiór uniwersum: $X \subseteq U$

Możliwa jest aproksymacja zbioru X wyłącznie przez wykorzystanie atrybutów ze zbioru B, poprzez określenie B*-dolnej* i B*-górnej* aproksymacji zbioru X:

$$\underline{B}X = \{\ x \mid [x]_B \subseteq X\}$$

$$\overline{B}X = \{\ x \mid [x]_B \cap X \neq \emptyset\}$$

$$BNB(X) = \overline{B}X - \underline{B}X$$

$$EXT_B(X) = U - \overline{B}X$$

$$\alpha_B(X) = \frac{|\underline{B}X|}{|\overline{B}X|}$$

Redukt

- Różne podzbiory atrybutów $B \subseteq A$ i $C \subseteq A$ mogą prowadzić do identycznych podziałów uniwersum, $\mathrm{IND}_B(X)=\mathrm{IND}_C(X)$
- Redukt to taki podzbiór atrybutów, który ma najmniejszą liczbę atrybutów, a ponadto zachodzi: $\mathrm{IND}_B(X)= \mathrm{IND}_A(X)$ (generuje taki sam podział jak cały zbiór atrybutów A)
- Wyznaczenie reduktu polega na pozostawieniu w podzbiorze tylko tych atrybutów, które zachowują relację równoważności, czyli nie zmieniają aproksymacji zbioru i usunięciu pozostałych
- Zwykle dla danego systemu decyzyjnego istnieć może wiele reduktów

Wyznaczanie reduktów

- Problem NP-trudny
- Liczba możliwych reduktów:
  $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$, gdzie m – liczba atrybutów
- „wąskie gardło” w systemach RoughSet
- Często stosowane są metody genetyczne do wyznaczania reduktów dla dużych systemów decyzyjnych

Macierz rozróżnialności

- Komórki c_{ij} macierzy zawierają te atrybuty, którymi różnią się obiekty x_i i x_j

$$c_{ij}=\{a \in A \mid a(x_i) \neq a(x_j)\}, \qquad j,i=1,2...n$$

n - liczba obiektów

$c_{ij}= c_{ji}$

$a_i^* = \{1 \text{ jeżeli } a_i \in c_{ij}; 0 \text{ w przeciwnym przypadku}\}$

(zmienna logiczna)

$c_{ij}^*=\{a^* \mid a \in c_{ij}\}$

Funkcja rozróżnialności

- Funkcja logiczna:

$$f_{\mathcal{A}}(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_m^*) = \bigwedge \{ \bigvee c_{ij}^* \mid c_{ij} \neq \emptyset \}, \quad j, i = 1, 2 \ldots n$$

Funkcja rozróżnialności

	Diploma	*Experience*	*French*	*Reference*	*Decision*
x_1	MBA	Medium	Yes	Excellent	Accept
x_2	MBA	Low	Yes	Neutral	Reject
x_3	MCE	Low	Yes	Good	Reject
x_4	MSc	High	Yes	Neutral	Accept
x_5	MSc	Medium	Yes	Neutral	Reject
x_6	MSc	High	Yes	Excellent	Accept
x_7	MBA	High	No	Good	Accept
x_8	MCE	Low	No	Excellent	Reject

$$
\begin{aligned}
f_{\mathcal{A}}(d,e,f,r) = {} & (e \vee r)(d \vee e \vee r)(d \vee e \vee r)(d \vee r)(d \vee e)(e \vee f \vee r)(d \vee e \vee f) \\
& (d \vee r)(d \vee e)(d \vee e)(d \vee e \vee r)(e \vee f \vee r)(d \vee f \vee r) \\
& (d \vee e \vee r)(d \vee e \vee r)(d \vee e \vee r)(d \vee e \vee f)(f \vee r) \\
& (e)(r)(d \vee f \vee r)(d \vee e \vee f \vee r) \\
& (e \vee r)(d \vee e \vee f \vee r)(d \vee e \vee f \vee r) \\
& (d \vee f \vee r)(d \vee e \vee f) \\
& (d \vee e \vee r)
\end{aligned}
$$

x_1, x_2

x_1, x_4

$e \wedge r$

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Upraszczanie funkcji rozróżnialności

$(e \vee r) \wedge (d \vee e \vee r) \wedge (d \vee r) \wedge (d \vee e \vee f)$

1 1 1 1

$e \wedge r$

$e \wedge d$

$r \wedge d$

$\cancel{r \wedge e}$

$r \wedge f$

$\underline{(e \wedge r) \vee (e \wedge d) \vee (r \wedge d) \vee (r \wedge f)}$

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Rozróżnialność względem k-tego obiektu

- Funkcja logiczna obliczana wyłącznie dla k-tej kolumny macierzy rozróżnialności

$f_{\mathcal{A}}(\mathrm{a}_1^*, \mathrm{a}_2^*, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{m}^*) = \bigwedge\{\bigvee c_{\mathrm{ij}}^* \mid c_{\mathrm{ij}} \neq \varnothing\}, \quad i=1,2\ldots n,$
$j=k$

- Uzyskiwana jest wiedza o atrybutach pozwalających rozróżnić k-ty obiekt (jego klasę abstrakcji) od innych obiektów uniwersum

Decyzja, klasa decyzyjna, notacja

$r(d) = |d(U)| = \{k \mid d(x)=k, x \in U\}$ – liczba decyzji w systemie decyzyjnym $\mathscr{A} = (U, A \cup \{d\})$

$v^{\mathrm{i}}_{\mathrm{d}}$ – wartość i-tej decyzji np. *Yes*, *No*, *Accept*, *Reject*,... $i=1,\ldots,r(d)$

$V_d=\{v^1_{\mathrm{d}}, \ldots v^{\mathrm{r(d)}}_{\mathrm{d}}\}$ – zbiór wszystkich wartości decyzji w systemie decyzyjnym, np. $\{Yes,No\}$

Decyzja, klasa decyzyjna, notacja

$X^k{}_{\mathcal{A}} = \{x \in U \mid d(x) = v^{\mathrm{k}}{}_{\mathrm{d}}\}$ – k-ta klasa decyzyjna, $k=1,\ldots,r(d)$

$CLASS_{\mathcal{A}}(d)=\{X^1{}_{\mathcal{A}},\ldots X^{\mathrm{r(d)}}{}_{\mathcal{A}}\}$ – zbiór wszystkich klas, klasyfikacja obiektów systemu $\mathcal{A}$ wyznaczana wartością decyzji *d*.

$X_{\mathcal{A}}(x) = \{x_{\mathrm{i}} \mid d(x_{\mathrm{i}})=d(x),\ x_{\mathrm{i}} \in U\}$ – klasa decyzyjna obiektu *x*,

Obszar *B-positive*

- Decyzja d determinuje podział uniwersum na $r(d)$ zbiorów, np. $U = X^{\mathrm{Yes}} \cup X^{\mathrm{No}}$
  $X^{\mathrm{Yes}} = \{x_1, x_4, x_6\}$
- Niech $X^1{}_{\mathcal{A}}, X^2{}_{\mathcal{A}}, \ldots X^{\mathrm{r(d)}}{}_{\mathcal{A}}$, będą klasami decyzyjnymi w $\mathcal{A}$
- $\underline{B}X^1{}_{\mathcal{A}} \cup \underline{B}X^2{}_{\mathcal{A}} \cup \ldots \cup \underline{B}X^{\mathrm{r(d)}}{}_{\mathcal{A}}$, nazywane jest obszarem B-pozytywnym i oznaczane $POS_B(d)$
- $\mathcal{A}$ jest systemem decyzyjnym **deterministycznym** (zgodnym), jeżeli $POS_B(d)=U$, w przeciwnym wypadku jest **niedeterministyczny**

Macierz rozróżnialności dla decyzji

	Diploma	*Experience*	*French*	*Reference*	*Decision*
x_1	MBA	Medium	Yes	Excellent	Accept
x_4	MSc	High	Yes	Neutral	Accept
x_6	MSc	High	Yes	Excellent	Accept
x_7	MBA	High	No	Good	Accept
x_2	MBA	Low	Yes	Neutral	Reject
x_3	MCE	Low	Yes	Good	Reject
x_5	MSc	Medium	Yes	Neutral	Reject
x_8	MCE	Low	No	Excellent	Reject

Poszukiwane tylko redukty pozwalające odróżnić obiekty o różnych decyzjach, a nie wszystkie obiekty między sobą

	$[x_1]$	$[x_4]$	$[x_6]$	$[x_7]$	$[x_2]$	$[x_3]$	$[x_5]$	$[x_8]$
$[x_1]$	$\emptyset$							
$[x_4]$	$\emptyset$	$\emptyset$						
$[x_6]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$					
$[x_7]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$				
$[x_2]$	e, r	d, e	d, e, r	e, f, r	$\emptyset$			
$[x_3]$	d, e, r	d, e, r	d, e, r	d, e, f	$\emptyset$	$\emptyset$		
$[x_5]$	d, r	e	e, r	d, e, f, r	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	
$[x_8]$	d, e, f	d, e, f, r	d, e, f	d, e, r	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Tylko gdy:
$POS_B(d)=U$

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Przybliżona przynależność

- $\mu^X{}_B \colon U \to [0;1]$

- $\mu^X{}_B(x) = \dfrac{|[x]_{\mathrm{B}} \cap X|}{|[x]_{\mathrm{B}}|}$

względna miara nakładania się klasy równoważności obiektu x ze zbiorem X.

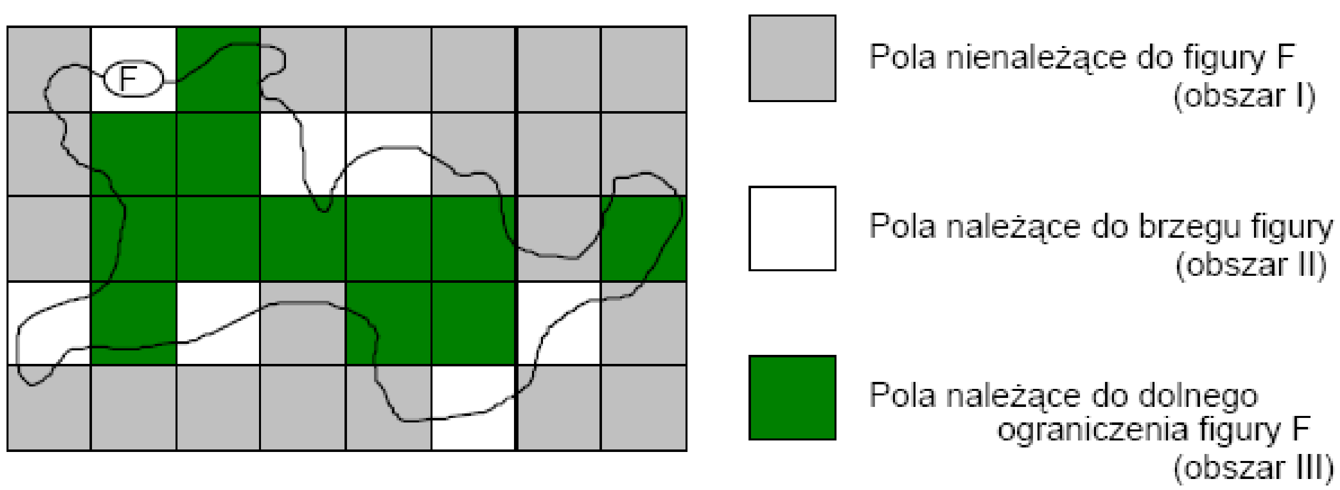
- Wprowadza się przybliżenia o **zmiennej precyzji** (dla $\pi=1$, przypadek klasyczny):

$\underline{B}_\pi X=\{\mathrm{x} \mid \mu^X{}_B(x) \geq \pi\}$ $\quad \overline{B}_\pi X=\{\mathrm{x} \mid \mu^X{}_B(x) \geq 1-\pi\}$

Zmienna precyzja

$$\underline{B}_{\pi}X=\{\mathrm{x} \mid \mu^{X}{}_{B}(x) \geq \pi\} \qquad \overline{B}_{\pi}X=\{\mathrm{x} \mid \mu^{X}{}_{B}(x) \geq 1-\pi\}$$

- $\pi = 0.33$



Dyskretyzacja parametrów (1)

$\mathbf{A}$	a	b	d
u_1	0.8	2	1
u_2	1	0.5	0
u_3	1.3	3	0
u_4	1.4	1	1
u_5	1.4	2	0
u_6	1.6	3	1
u_7	1.3	1	1

$\Rightarrow$

$\mathbf{A}^{\mathbf{P}}$	a^P	b^P	d
u_1	0	2	1
u_2	1	0	0
u_3	1	2	0
u_4	1	1	1
u_5	1	2	0
u_6	2	2	1
u_7	1	1	1

$$\mathbf{P} = \{(a; 0.9); (a; 1.5); (b; 0.75); (b; 1.5)\}$$

Partycjonowanie dziedzin parametrów – zbiór cięć

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Dyskretyzacja parametrów (2)

A	a	b	d
u_1	0.8	2	1
u_2	1	0.5	0
u_3	1.3	3	0
u_4	1.4	1	1
u_5	1.4	2	0
u_6	1.6	3	1
u_7	1.3	1	1

Niech: V_a = <0; 2) ; V_b = <0; 4)

<0.8;1); <1; 1.3); <1.3; 1.4); <1.4; 1.6) dla *a*

<0.5; 1); <1; 2); <2; 3) dla *b*

Środki przedziałów przyjmowane za miejsca cięć:

(*a*; 0.9); (*a*; 1.15); (*a*; 1.35); (*a*; 1.5);

(*b*; 0.75); (*b*; 1.5); (*b*; 2.5)

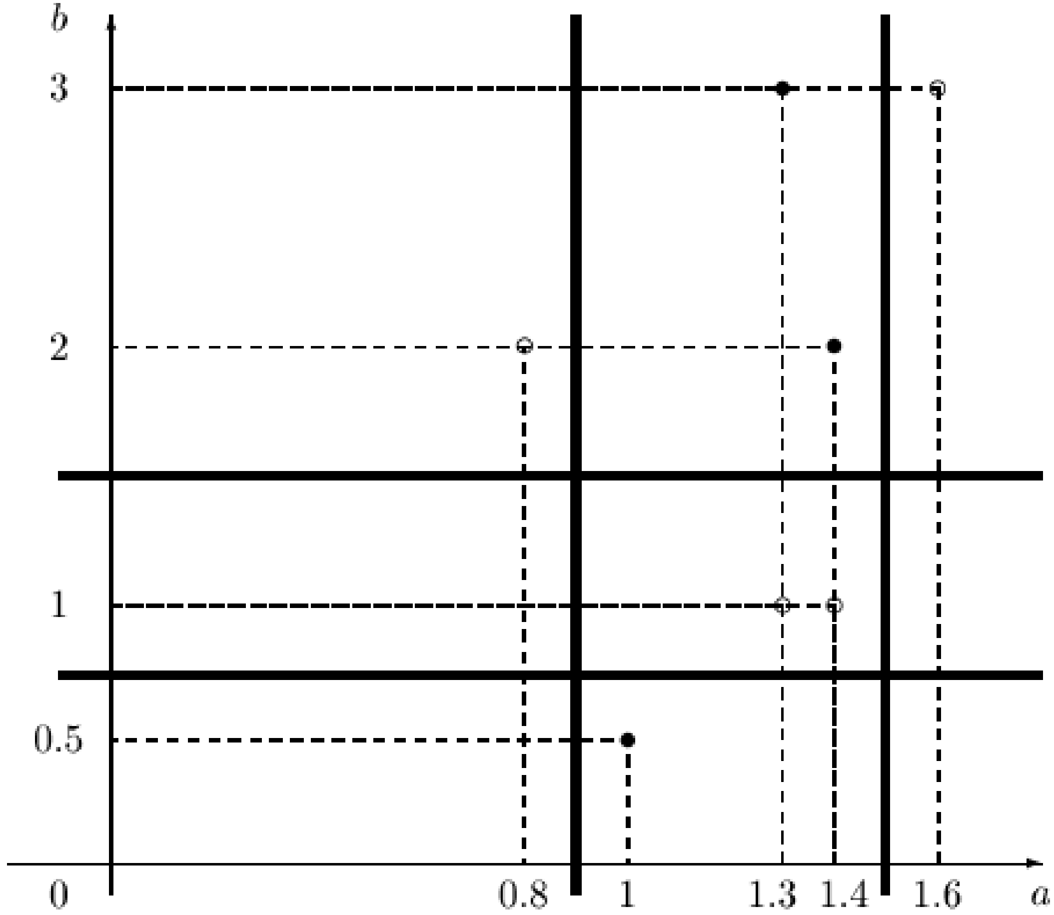
Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Dyskretyzacja parametrów (3)

Usuwane są te cięcia, które nie prowadzą do rozróżnienia choć jednej pary obiektów:

(a; 0.9); ~~(a; 1.15);~~
~~(a; 1.35);~~ (a; 1.5);

(b; 0.75); (b; 1.5);
~~(b; 2.5)~~

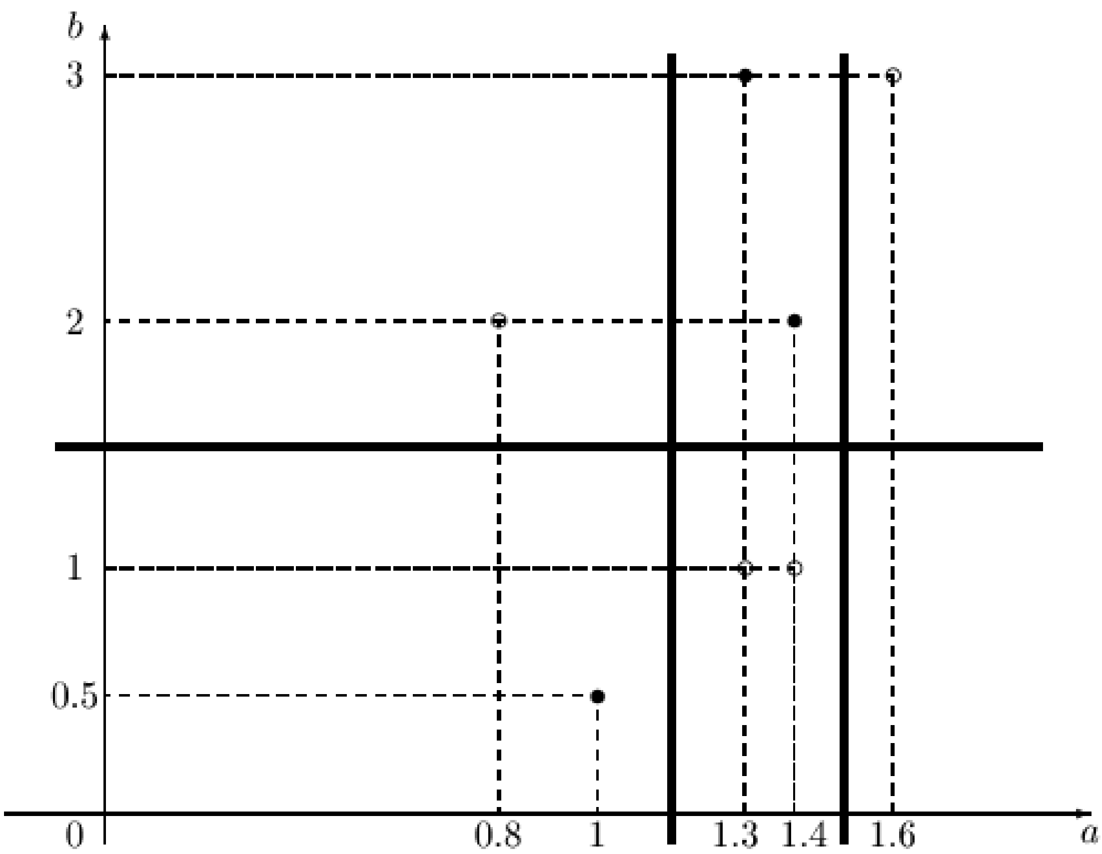


$$\mathbf{P} = \{(a; 0.9); (a; 1.5); (b; 0.75); (b; 1.5)\}$$

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Dyskretyzacja parametrów (4)

- Minimalny zestaw cięć uzyskany algorytmem MD-Heuristics,
  J. Komorowski, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Set: A Tutorial*



Generowanie reguł decyzyjnych

	Diploma	*Experience*	*French*	*Reference*	*Decision*
x_1	MBA	Medium	Yes	Excellent	Accept
x_2	MBA	Low	Yes	Neutral	Reject
x_3	MCE	Low	Yes	Good	Reject
x_4	MSc	High	Yes	Neutral	Accept
x_5	MSc	Medium	Yes	Neutral	Reject
x_6	MSc	High	Yes	Excellent	Accept
x_7	MBA	High	No	Good	Accept
x_8	MCE	Low	No	Excellent	Reject

$$f_{\mathcal{A}}(d,e,f,r)=(d \wedge e) \vee (e \wedge r)$$

$$\Downarrow$$

IF *Diploma*=MBA AND *Experience*=Medium THEN *Decision*=Accept

Podstawiać kombinacje atrybutów w regule:

$\underbrace{\text{IF } \textit{Diploma}=\ldots \quad \text{AND } \textit{Experience}=\ldots}_{\text{Poprzednik reguły}}$ $\underbrace{\text{THEN } \textit{Decision}=\ldots}_{\text{Następnik reguły}}$

Przykład pochodzi z: J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron: *Rough Sets: A Tutorial*. In S.K. Pal and A. Skowron, editors, *Rough Fuzzy Hybridization, A New Trend in and Decision Making*, pages 3-98. Springer-Verlag, Singapore, 1999.

Wykorzystanie reguł do klasyfikacji

1. Obliczenie atrybutów nowego obiektu
2. Poszukiwanie reguł pasujących do wartości atrybutów
3. Jeżeli brak pasujących reguł, wynikiem jest najczęstsza decyzja w $\mathcal{A}$
4. Jeżeli pasuje wiele reguł mogą one wskazywać na różne decyzje, wówczas:

Przeprowadzane jest głosowanie – wybierana jest odpowiedź pojawiająca się najczęściej

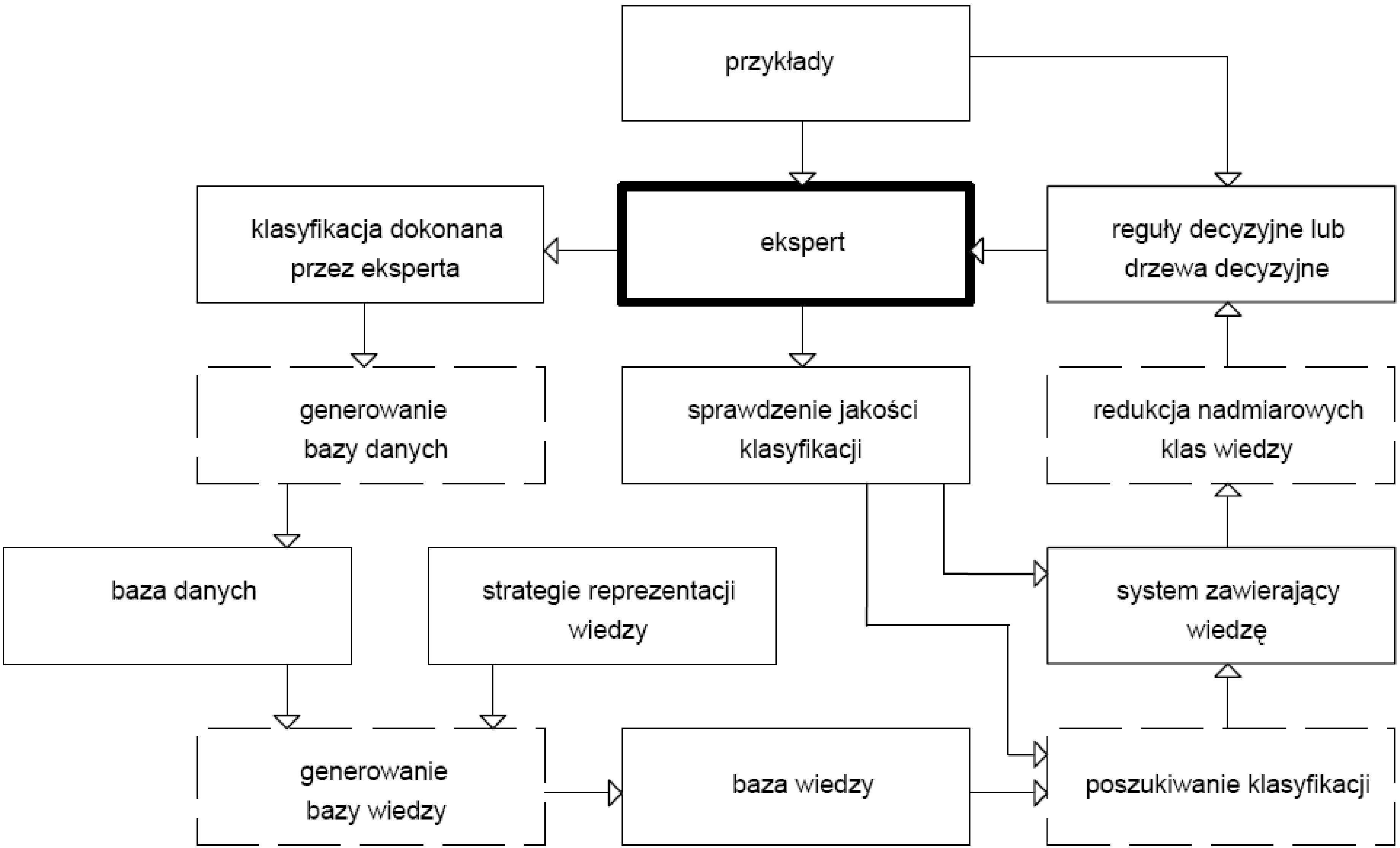
Klasyfikacja (1)

- niesklasyfikowany obiekt pasuje dokładnie do jednej **deterministycznej** reguły - jest to sytuacja najbardziej pożądana, gdyż wtedy od razu uzyskuje się wiadomość, że obiekt należy do zadanej klasy - a wiec do **dolnego przybliżenia zbioru**
- niesklasyfikowany obiekt pasuje dokładnie do jednej, **niedeterministycznej** reguły - sytuacja ta jest nadal pozytywna, gdyż nadal daje jednoznaczną klasyfikację, choć tym razem uzyskuje się jedynie wiadomość, że obiekt *prawdopodobnie* należy do zbioru - a wiec, że należy do jego **górnego przybliżenia**

Klasyfikacja (2)

- niesklasyfikowany obiekt pasuje do **więcej niż jednej** reguły - kilka potencjalnych przynależności obiektu (**jednocześnie do różnych klas**), a więc decyzja nie jest jednoznaczna
- zazwyczaj w takim przypadku stosuje się **dodatkowe kryteria** dla oceny, do której z klas z największym prawdopodobieństwem należy obiekt.

System informacyjny



Przykład aplikacji

- Rough Set Exploration System: http://logic.mimuw.edu.pl/~rses/

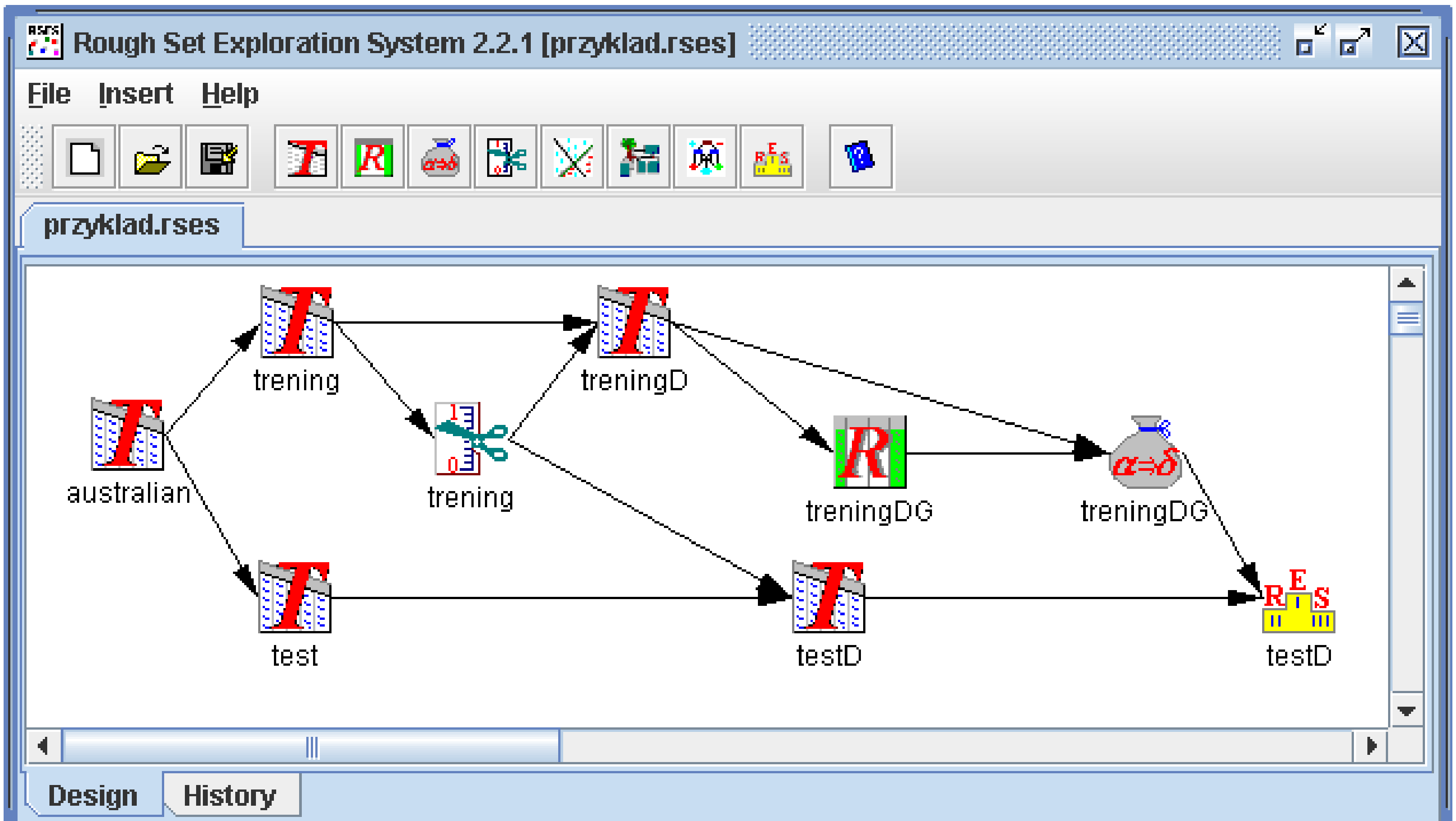


Table: trening

A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	CLASS
0	0	0	1	2	100	1213	0
0	0	0	0	2	160	1	0
0	0	0	1	2	280	1	0
1	1	11	1	2	0	1	1
1	1	14	0	2	60	159	1
1	1	6	0	2	43	561	1
0	0	0	0	2	176	538	0
1	1	3	1				
1	1	4	1				
1	1	6	1				
1	1	6	1				

Cut set: trening

(1-14)	Attribute	Size	Description
1	A1	0	*
2	A2	8	21.04; 21.21; 23.04; 24.0; 27.915; 31.125; 37.25; 45.58
3	A3	5	0.555; 2.23; 4.48; 6.02; 8.54
4	A4	0	*
5	A5	0	*
6	A6	0	*
7	A7	3	0.1875; 1.02; 3.1675
8	A8	0	*
9	A9	0	*
			.0; 296.0

Table: treningD

A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	CLASS
0	0	"(-Inf,0.5)"	1	2	"(75.5,111.0...	"(309.0,Inf)"	0
0	0	"(-Inf,0.5)"	0	2	"(111.0,172....	"(-Inf,13.5)"	0
0	0	"(-Inf,0.5)"	1	2	"(172.0,296....	"(-Inf,13.5)"	0
1	1	"(2.5,Inf)"	1	2	"(-Inf,75.5)"	"(-Inf,13.5)"	1
1	1	"(2.5,Inf)"	0	2	"(-Inf,75.5)"	"(13.5,309.0...	1
1	1	"(2.5,Inf)"	0	2			
0	0	"(-Inf,0.5)"	0	2			
1	1	"(2.5,Inf)"	1	2			
1	1	"(2.5,Inf)"	1	2			
1	1	"(2.5,Inf)"	1	2			
1	1	"(2.5,Inf)"	1	2			
0	0	"(-Inf,0.5)"	0	2			
0	0	"(-Inf,0.5)"	0	2			

Reduct set: treningDG

(1-10)	Size	Pos.Reg.	SC	Reducts
1	6	1	1	{ A2, A3, A7, A10, A13, A14 }
2	7	1	1	{ A2, A3, A5, A7, A8, A10, A13 }
3	7	1	1	{ A1, A2, A3, A4, A5, A7, A13 }
4	7	1	1	{ A1, A2, A3, A5, A7, A8, A13 }
5	7	1	1	{ A1, A2, A3, A5, A7, A9, A13 }
6	7	1	1	{ A1, A2, A3, A5, A7, A10, A13 }
7	7	1	1	{ A2, A3, A4, A5, A7, A10, A13 }
8	7	1	1	{ A2, A3, A5, A10, A12, A13, A14 }
9	7	1	1	{ A2, A3, A5, A8, A10, A13, A14 }
10	7	1	1	{ A2, A3, A5, A8, A9, A13, A14 }

Rule set: treningDG

...	Match	Decision rules
1	1	(A2="(21.21,23.04)")&(A3="(8.54,Inf)")&(A7="(1.02,3.1675)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(75.5,111.0)")&(A14="(309.0,Inf)")=>(CLASS={0[1]})
2	1	(A2="(21.21,23.04)")&(A3="(6.02,8.54)")&(A7="(-Inf,0.1875)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(111.0,172.0)")&(A14="(-Inf,13.5)")=>(CLASS={0[1]})
3	2	(A2="(27.915,31.125)")&(A3="(0.555,2.23)")&(A7="(1.02,3.1675)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(172.0,296.0)")&(A14="(-Inf,13.5)")=>(CLASS={0[2]})
4	1	(A2="(21.21,23.04)")&(A3="(8.54,Inf)")&(A7="(-Inf,0.1875)")&(A10="(2.5,Inf)")&(A13="(-Inf,75.5)")&(A14="(-Inf,13.5)")=>(CLASS={1[1]})
5	1	(A2="(-Inf,21.04)")&(A3="(6.02,8.54)")&(A7="(1.02,3.1675)")&(A10="(2.5,Inf)")&(A13="(-Inf,75.5)")&(A14="(13.5,309.0)")=>(CLASS={1[1]})
6	1	(A2="(45.58,Inf)")&(A3="(2.23,4.48)")&(A7="(1.02,3.1675)")&(A10="(2.5,Inf)")&(A13="(-Inf,75.5)")&(A14="(309.0,Inf)")=>(CLASS={1[1]})
7	1	(A2="(24.0,27.915)")&(A3="(0.555,2.23)")&(A7="(1.02,3.1675)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(172.0,296.0)")&(A14="(309.0,Inf)")=>(CLASS={0[1]})
8	1	(A2="(45.58,Inf)")&(A3="(6.02,8.54)")&(A7="(3.1675,Inf)")&(A10="(2.5,Inf)")&(A13="(75.5,111.0)")&(A14="(13.5,309.0)")=>(CLASS={0[1]})
9	1	(A2="(31.125,37.25)")&(A3="(0.555,2.23)")&(A7="(3.1675,Inf)")&(A10="(2.5,Inf)")&(A13="(172.0,296.0)")&(A14="(309.0,Inf)")=>(CLASS={1[1]})
10	2	(A2="(37.25,45.58)")&(A3="(4.48,6.02)")&(A7="(3.1675,Inf)")&(A10="(2.5,Inf)")&(A13="(296.0,Inf)")&(A14="(-Inf,13.5)")=>(CLASS={1[2]})
11	1	(A2="(31.125,37.25)")&(A3="(4.48,6.02)")&(A7="(3.1675,Inf)")&(A10="(2.5,Inf)")&(A13="(-Inf,75.5)")&(A14="(309.0,Inf)")=>(CLASS={1[1]})
12	1	(A2="(45.58,Inf)")&(A3="(6.02,8.54)")&(A7="(-Inf,0.1875)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(-Inf,75.5)")&(A14="(309.0,Inf)")=>(CLASS={1[1]})
13	1	(A2="(-Inf,21.04)")&(A3="(0.555,2.23)")&(A7="(-Inf,0.1875)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(111.0,172.0)")&(A14="(-Inf,13.5)")=>(CLASS={0[1]})
14	1	(A2="(27.915,31.125)")&(A3="(0.555,2.23)")&(A7="(-Inf,0.1875)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(172.0,296.0)")&(A14="(309.0,Inf)")=>(CLASS={0[1]})
15	1	(A2="(-Inf,21.04)")&(A3="(0.555,2.23)")&(A7="(0.1875,1.02)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(111.0,172.0)")&(A14="(-Inf,13.5)")=>(CLASS={0[1]})
16	4	(A2="(37.25,45.58)")&(A3="(0.555,2.23)")&(A7="(-Inf,0.1875)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(111.0,172.0)")&(A14="(-Inf,13.5)")=>(CLASS={0[4]})
17	1	(A2="(37.25,45.58)")&(A3="(0.555,2.23)")&(A7="(0.1875,1.02)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(111.0,172.0)")&(A14="(-Inf,13.5)")=>(CLASS={0[1]})
18	1	(A2="(-Inf,21.04)")&(A3="(8.54,Inf)")&(A7="(0.1875,1.02)")&(A10="(-Inf,0.5)")&(A13="(75.5,111.0)")&(A14="(309.0,Inf)")=>(CLASS={0[1]})
19	1	(A2="(31.125,37.25)")&(A3="(0.555,2.23)")&(A7="(3.1675,Inf)")&(A10="(2.5,Inf)")&(A13="(-Inf,75.5)")&(A14="(-Inf,13.5)")=>(CLASS={1[1]})
20	2	[illegible]

Results of experiments by train&test method: testD

	Predicted					
Actual		0	1	No. of obj.	Accuracy	Coverage
	0	23	10	99	0.697	0.333
	1	4	18	74	0.818	0.297
	True positive rate	0.85	0.64			

Total number of tested objects: 173

Total accuracy: 0.745

Total coverage: 0.318

Dziękuję za uwagę